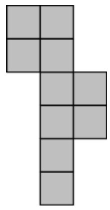
Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

– Lösungsvektor –

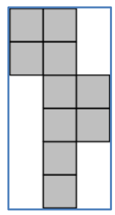
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	D	E	A	B	C	B	E	D	A	C	B	B	B	A	C	E	D	A	D	B	C	E	D	C	C	C	A	B	D

– 3 Punkte Beispiele –

1. Die Abbildung zeigt eine Figur, die aus 10 Quadraten mit Seitenlänge 1 cm besteht, die Seite an Seite liegen. Wie groß ist der Umfang der Figur in cm?



(A) 14 **(B)** 18 (C) 30 (D) 32 (E) 40



Der Umfang der Figur ist gleich groß wie der Umfang des umschriebenen Rechtecks.

U = 2·(3 cm + 6 cm) = **18 cm**

2. Welches Ergebnis befindet sich in der Mitte, wenn die Ergebnisse der folgenden Rechnungen der Größe nach geordnet werden?

(A) 1 + 2345 (B) 12 + 345 (C) 123 + 45 **(D)** 1234 + 5 (E) 12345 + 0

Die Ergebnisse der zweiten und dritten Rechnung sind dreistellig. Die Ergebnisse der ersten und vierten Rechnung sind vierstellig, das Ergebnis in E muss nicht berechnet werden, es ist fünfstellig. Daher befindet sich in der Mitte der geordneten Ergebnisse das kleinere der zwei vierstelligen Ergebnisse, also **1234 + 5 = 1239**, weil die Tausenderziffer hier kleiner ist.

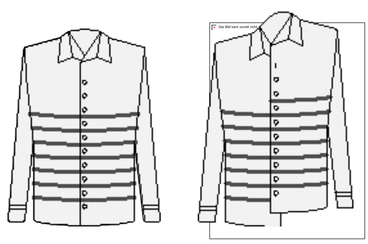
3. Wer ist die Mutter der Tochter von Annas Großmutter?

(A) Annas Schwester (B) Annas Nichte (C) Annas Mutter (D) Annas Tante **(E)** Annas Großmutter

Die Töchter von Annas Großmutter sind Annas Mutter und deren Schwestern, wenn sie welche hat.
Alle haben **Annas Großmutter** als Mutter.

4. Trägt Cosimo sein neues Hemd wie in der Abbildung links, so bilden die horizontalen Streifen sieben geschlossene Ringe um seinen Oberkörper. Heute hat er die Knöpfe, wie rechts abgebildet, falsch zugeknöpft. Wie viele geschlossene Ringe befinden sich nun um Cosimos Oberkörper?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4



Es existiert kein geschlossener Ring. Die Anzahl ist also **0**.

Es ist eine Art Spirale. Von vorne gesehen ist der oberste linke Streifen mit dem von oben zweiten rechten Streifen verbunden und so weiter. Vergleiche mit der Rille einer Schallplatte.

5. In der dargestellten Rechnung steht jeder Buchstabe anstelle einer Ziffer, wobei gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern stehen.
Die Buchstaben werden verwendet, um einige zweistellige Zahlen zu bilden.
Wie groß ist die Summe der vier Zahlen auf der rechten Seite?

$$\begin{array}{r} \text{A B} \\ +\,\text{C D} \\ \hline 7\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{A D} \\ +\,\text{C D} \\ +\,\text{A B} \\ +\,\text{C B} \\ \hline ? \end{array}$$

(A) 79 (B) 158 (C) 869 (D)1418 (E)7979

Für die gegebene Summe gilt: 79 = 10A + B + 10C +D.
Für die unbekannte Summe S gilt: S = 10A + D + 10C +D + 10A + B + 10C +B = 2·(10A + B + 10C +D) = 2·79 = **158**.

6. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist 2. Wie lautet die kleinste dieser Zahlen?
(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 (E) 1

Wir nennen die gesuchte kleinste Zahl x. Die Gleichung $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 2) = 4x + 6 = 2$ liefert als Lösung **-1**.
Alternative Lösung: Weil die Summe 2 ist, muss die kleinste Zahl negativ sein.
Wegen -1 + 0 + 1 +2 = 0 +2 ist die Summe 2 gleich der größten Zahl und -1 der gesuchte kleinste Summand.

7. Die Jahreszahlen 2020 und 1717 bestehen jeweils aus einer zweistelligen Zahl, die zweimal hintereinander angeschrieben wird.
In wie vielen Jahren nach 2020 wird das nächste Mal eine Jahreszahl diese Eigenschaft besitzen?
(A) 20 (B) 101 (C) 120 (D) 121 (E) 202

Wegen 20 + 1 = 21 ist die nächste Jahreszahl mit dieser Eigenschaft ist 2121 = 2020 + 101.
Daher wird dies **in 101 Jahren** das nächste Mal der Fall sein.

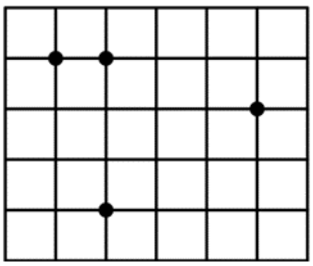
8. Maria hat zehn Papierstücke. Einige davon sind Quadrate, die übrigen sind Dreiecke. Sie zerschneidet drei der Quadrate entlang einer Diagonale. Die 13 Stücke haben nun zusammen 42 Ecken. Wie viele Dreiecke hatte sie, bevor sie zu schneiden begann?
(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

Zerschneidet man ein Quadrat in zwei Dreiecke, so nimmt die Anzahl der Figuren um 1 und die Gesamtanzahl der Ecken um 2 zu. Beim Zerschneiden von 3 Quadraten erhöht sich also die Anzahl der Ecken insgesamt um 6 auf 42. Daher hatten die 10 Figuren anfangs zusammen 36 Ecken, also um 4 Ecken weniger, als 10 Quadrate hätten. Daher hatte Maria vor dem Zerschneiden der Quadrate **4 Dreiecke** und 6 Quadrate

9. Helena möchte 18 aufeinanderfolgende Tage bei ihrer Großmutter verbringen. Die Großmutter erzählt an den Märchentagen Dienstag, Samstag und Sonntag jeweils genau ein Märchen, an den anderen Tagen keines. Helena möchte möglichst viele Märchen hören. An welchem Wochentag sollte Helena ihren Besuch beginnen?
(A) Montag (B) Dienstag (C) Freitag (D) Samstag (E) Sonntag

In 14 Tagen erzählt die Großmutter immer 6 Märchen, da jeder Wochentag zweimal vorkommt. An den übrigen 4 Tagen möchte Helena möglichst viele Märchen hören. Startet sie ihren Besuch am Samstag, so kommen alle drei Märchentage während des Besuchs zusätzlich auch noch ein drittes Mal vor. Sie sollte ihren Besuch also an einem **Samstag** starten. Bei allen anderen Tagen würde sie weniger Märchen hören.

10. Das gegebene Gitter besteht aus lauter Quadraten mit Seitenlänge 1.
Vier Gitterpunkte sind markiert. Was ist der kleinste Flächeninhalt, den ein Dreieck mit Eckpunkten in drei dieser Punkte haben kann?

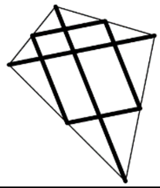


(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{5}{2}$

Da die Fläche eines Dreiecks die Hälfte des Produkts aus Grundlinie und Höhe ist, muss man die beiden Längen minimal wählen. Dies gelingt, wenn man die obersten drei Punkte wählt, da dann beide Größen den minimal möglichen Wert 1 haben und man ein Dreieck mit Fläche $\frac{1}{2}$ erhält.
Da keine drei der markierten Punkte auf einer geraden liegen, gibt es kein entartetes Dreieck mit Fläche 0.

4 Punkte Beispiele

11. Martin baut einen Drachen, indem er einen geraden Holzstab in sechs Stücke zerteilt.
Er nutzt zwei davon, mit den Längen 120 cm und 80 cm, für die Diagonalen.
Die restlichen vier Stücke verbinden die Mittelpunkte der Seiten des Drachens.
Wie lang war der ursprüngliche Holzstab?



(A) 300 cm (B) 370 cm **(C)** 400 cm (D) 410 cm (E) 450 cm

Die Verbindung zweier nebeneinanderliegender Seitenmittelpunkte ist jeweils parallel zu einer Diagonalen des Drachens und wegen des Strahlensatzes halb so lang wie diese Diagonale.
Die Summe der vier Holzstäbe, welche die Seitenmittelpunkte verbinden, ist daher gleich der Summe der beiden Diagonalen. Die Länge des ursprünglichen Holzstabs ist also die doppelte Summe der Diagonalen, nämlich

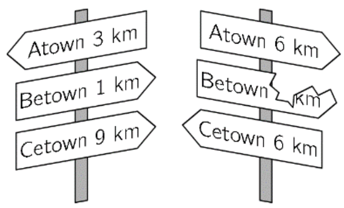
$2 \cdot (120 \text{ cm} + 80 \text{ cm}) = \mathbf{400\text{ cm}}$.

12. Die ganzen Zahlen a, b, c und d erfüllen die Gleichung $ab = 2cd$.
Welchen der folgenden Werte kann das Produkt $abcd$ nicht annehmen?

(A) 50 **(B)** 100 (C) 200 (D) 450 (E) 800

Wegen $ab = 2cd$ gilt $abcd = 2c^2d^2 = 2 \cdot (cd)^2$. Daher muss der Wert jedes möglichen Produkts das Doppelte einer Quadratzahl sein. Wegen $50 = 2 \cdot 5^2$, $200 = 2 \cdot 10^2$, $450 = 2 \cdot 15^2$ und $800 = 2 \cdot 20^2$, aber $100 = 10^2$ kann das Produkt die Zahl **100** als einzigen der angegebenen Werte nicht annehmen.

13. Der kürzeste Weg von Atown nach Cetown führt durch Betown.
Geht man auf diesem Weg von Atown nach Cetown, trifft man zunächst auf den linken Wegweiser, danach auf den rechten Wegweiser.
Welche Distanzangabe stand auf dem beschädigten Wegweiser?



(A) 1 km **(B)** 2 km (C) 3 km (D) 4 km (E) 5 km

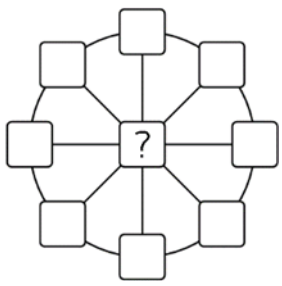
Beachte, dass der linke Wegweiser zwischen Atown und Betown, der rechte zwischen Betown und Cetown steht.
Beide Wegweiser zeigen, dass der kürzeste Weg von Atown nach Cetown 12 km (= 3 km + 9 km = 6 km + 6 km) lang ist. Am linken Wegweiser ist zu erkennen, dass Betown 3 km + 1 km = 4 km von Atown und 9 km – 1 km = 8 km von Cetown entfernt ist.
Daher fehlt auf dem beschädigten Wegweiser die Angabe **2 km**, denn 4 km = 6 km – 2 km und 8 km = 6 km + 2 km.

14. Eine Seite eines gleichschenkeligen Dreiecks ist 20 cm lang. Von den beiden anderen Seiten misst die eine $\frac{2}{5}$ der anderen. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

(A) 36 cm **(B)** 48 cm (C) 60 cm (D) 90 cm (E) 120 cm

Nach Angabe verhalten sich zwei Seitenlängen des Dreiecks wie 2 : 5. Weil das Dreieck gleichschenklig ist, muss die dritte Seite gleich lang sein wie eine der beiden anderen Seiten. Nach Dreiecksungleichung ist ein Seitenverhältnis von 2 : 2 : 5 nicht möglich, also verhalten sich die Seiten wie 2 : 5 : 5, und die gegebene Länge 20 cm muss die Länge der beiden Schenkel des Dreiecks sein. Die Länge der Basis beträgt dann $\frac{2}{5} \cdot 20 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$.
Somit hat das Dreieck einen Umfang von $8 \text{ cm} + 2 \cdot 20 \text{ cm} = \mathbf{48\text{ cm}}$.

15. In die neun Felder der Figur soll jeweils eine beliebige Zahl eingetragen werden.
Die Summe der drei Zahlen entlang jedes Durchmessers soll 13 betragen.
Die Summe der acht Zahlen entlang des Kreisumfangs soll 40 sein.
Welche Zahl muss in das Feld in der Mitte eingetragen werden?



(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Die Summe der Zahlen entlang der vier Durchmesser beträgt $4 \cdot 13 = 52$. Das ist die Summe der acht Zahlen entlang des Kreisumfangs und dem Vierfachen der Zahl in der Mitte. Weil $52 = 40 + 12$ ist, muss die Zahl in der Mitte ein Viertel von 12, also **die Zahl 3** sein.

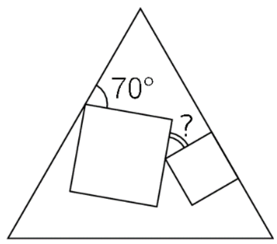
16. Maria setzt ein Multiplikationszeichen zwischen die zweite und dritte Ziffer der Zahl 2020 und bemerkt, dass das entstandene Produkt $20 \cdot 20$ eine Quadratzahl ist.
Wie viele Zahlen zwischen 2010 und 2099 (inklusive 2020) haben diese Eigenschaft?
(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

In jedem der zu betrachtenden Produkte ist der erste Faktor $20 = 5 \cdot 2^2$. Damit muss der zweite Faktor ebenfalls das (zweistellige) Fünffache einer Quadratzahl sein. Die Zahl $5 \cdot 1^2 = 5$ ist nicht zweistellig, aber $5 \cdot 2^2 = 20$, $5 \cdot 3^2 = 45$ und $5 \cdot 4^2 = 80$ erfüllen diese (notwendige und hinreichende) Bedingung, während $5 \cdot 5^2 = 125$ zu groß ist.
Damit haben genau die **3 Zahlen** 2020, 2045 und 2080 die geforderte Eigenschaft.

17. Zwei Quadrate werden wie abgebildet in ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet.

Wie groß ist der mit „?“ markierte Winkel?

(A) 30° (B) 35° (C) 40° (D) 45° **(E)** 50°



Der Teil des Dreiecks rechts oberhalb der beiden Quadrate ist ein Fünfeck mit einer einspringenden Ecke, von dem vier Winkel bekannt sind: 70°, 270°, 90°, 60°. Zusammen mit dem gesuchten Winkel x muss sich wie in jedem Fünfeck die Winkelsumme $3 \cdot 180° = 540°$ ergeben.
Daraus folgt $x = 540 - (70+270+90+60) = 540 - 490 = 50$; der gesuchte Winkel beträgt also **50°**.
Bemerkung: Durch Verlängerung der rechten Seite des großen Quadrats kann das Fünfeck in ein Viereck und ein Dreieck zerlegt werden.

18. Luca startet eine 520 km lange Autobahnfahrt mit 14 Litern Benzin im Tank. Sein Auto verbraucht einen Liter Benzin je 10 km. Nach 55 km liest er ein Schild, auf dem die Entfernungen zu den nächsten fünf Tankstellen auf seinem Weg angegeben sind.
Diese sind 35 km, 45 km, 55 km, 75 km und 95 km. Der Tank fasst 40 Liter. Luca möchte nur einmal tanken.
Wie weit ist es noch bis zur Tankstelle, bei der er tanken sollte?
(A) 35 km (B) 45 km (C) 55 km **(D)** 75 km (E) 95 km

Mit 14 Litern Benzin können 140 km zurückgelegt werden. Nach 55 km können mit dem Benzin im Tank nur mehr 85 km zurückgelegt werden. Tankt man bei der Tankstelle, die **75 km** entfernt ist, so können mit einem vollen Tank die restlichen 390 km zurückgelegt werden, in der Hoffnung, dass nicht durch Stau oder zähflüssigen Verkehr der Benzinverbrauch erhöht wird.

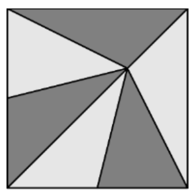
19. Es gilt $17x + 51y = 102$. Welchen Wert hat $9x + 27y$?
(A) 54 (B) 36 (C) 34 (D) 18 (E) Der Wert ist nicht eindeutig bestimmbar.

Die erste Gleichung lässt sich durch 17 kürzen, dann erhält man $x + 3y = 6$. Erweitert man nun mit 9, dann erhält man

$$9x + 27y = \mathbf{54}.$$

20. Ein 81 dm² großes quadratisches Fensterglas besteht wie abgebildet aus sechs flächengleichen Dreiecken. Welchen Abstand hat der gemeinsame Eckpunkt der sechs Dreiecke von der Unterkante des Fensters?

(A) 3 dm (B) 5 dm (C) 5,5 dm **(D)** 6 dm (E) 7,5 dm



Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt 81 dm², daher hat es die Seitenlänge s = 9 dm.
Die beiden über der unteren Quadratseite errichteten Dreiecke haben den gesuchten Abstand als Höhe über dieser Seite gemeinsam und haben zusammen den Flächeninhalt $A = \frac{1}{3}\,81$ dm² = 27 dm².
Daraus ergibt sich als Höhe $h = \frac{2A}{s} = \frac{54}{9} = 6$, daher beträgt der gesuchte **Abstand 6 dm**.

– 5 Punkte Beispiele –

21. Wir bilden alle 9-ziffrigen Zahlen, die jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthalten.
Wie groß ist der relative Anteil der durch 18 teilbaren Zahlen unter ihnen?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

Alle 9-ziffrigen Zahlen, die jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthalten, haben die Ziffernsumme 45 und sind daher jedenfalls durch 9 teilbar. Maßgeblich dafür, dass eine derartige Zahl durch 18 teilbar ist, ist also ausschließlich, ob die Zahl gerade ist, also ihre Einerziffer.
Weil von den neun zur Verfügung stehendenden Einerziffern vier (2, 4, 6, 8) gerade sind, ist der der relative Anteil der durch 18 teilbaren Zahlen unter den betrachteten Zahlen gleich $\mathbf{\frac{4}{9}}$.

22. Ein Hase und eine Schildkröte machen ein Wettrennen auf einer 5 km langen geraden Strecke. Der Hase ist fünfmal so schnell wie die Schildkröte. Irrtümlich startet der Hase rechtwinkelig zur Rennstrecke.
Nach einer Weile bemerkt er den Fehler. Er ändert seine Richtung und läuft geradlinig auf das Ziel zu.
Er erreicht das Ziel gleichzeitig mit der Schildkröte.
Wie groß ist der Abstand zwischen dem Punkt, an dem der Hase die Richtung geändert hat, und dem Ziel?

(A) 11 km (B) 12 km (C) 13 km (D) 14 km (E) 15 km

Das zweite pythagoräische Zahlentrippel (5,12,13) liefert die Lösung dieser Aufgabe.
Ändert er nach 12 km seine Richtung, dann muss er noch **13 km** laufen.
Probe: 12 km + 15 km = 25 km = 5·5 km.
Bemerkung: Die Aufgabe kann auch mithilfe eines Gleichungsansatzes gelöst werden.

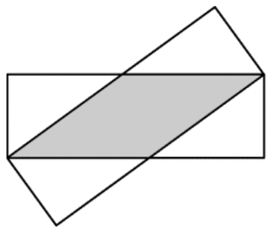
23. Auf dem Tisch liegen einige Quadrate und Dreiecke. Manche dieser Figuren sind blau, die übrigen sind rot.
Manche der Figuren sind groß, die übrigen sind klein. Wir wissen:
1. Ist eine Figur groß, so ist sie ein Quadrat.
2. Ist eine Figur blau, so ist sie ein Dreieck.

Welche der Aussagen (A) – (E) ist mit Sicherheit wahr?

(A) Alle roten Figuren sind Quadrate. (B) Alle Quadrate sind groß. (C) Alle kleinen Figuren sind blau.
(D) Alle Dreiecke sind blau. (E) Alle blauen Figuren sind klein.

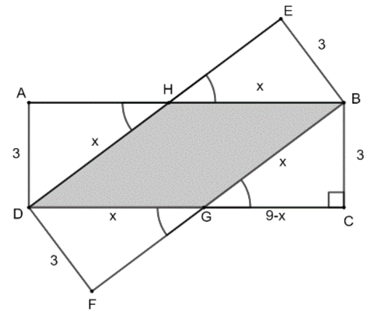
Es gilt: Ist eine Figur groß, so ist sie ein Quadrat. Daher müssen alle Dreiecke kleine Figuren sein.
Es gilt: Ist eine Figur blau, so ist sie ein Dreieck. Das heißt, dass alle blauen Figuren Dreiecke sind.
Da alle Dreiecke kleine Figuren sind und blaue Figuren immer Dreiecke sind, müssen **alle blauen Figuren klein sein.**

24. Zwei deckungsgleiche Rechtecke mit Seitenlängen 3 cm und 9 cm überlappen einander wie abgebildet.
Wie groß ist die überlappende Fläche?



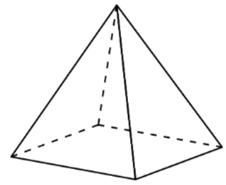
(A) 12 cm² (B) 13,5 cm² (C) 14 cm² (D) 15 cm² (E) 16 cm²

Auf Grund der vorhandenen Parallelwinkel sind die Dreiecke *ADH* und *DFG* kongruent. Daher ist die entstehende graue Figur eine Raute mit Seitenlänge *x*.
Es gilt: $9 - x = y$
Quadrieren wir die Gleichung folgt $81 - 18x + x^2 = y^2$
In den weißen rechtwinkeligen Dreiecken gilt der Satz des Pythagoras: $x^2 = y^2 + 9$
Wenn die Gleichungen gleichgesetzt werden, gilt: $81 - 18x + x^2 + 9 = x^2$
Somit gilt $x = 5$.
Nach Einsetzen in die Flächenformel erhalten wir $(5 \cdot 3) = 15$**.**



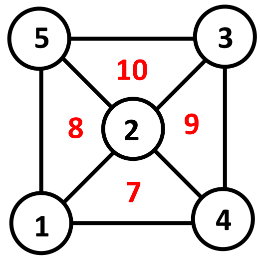
Der Flächeninhalt der überlappenden Fläche beträgt **15 cm².**

25. Kanga beschriftet die Eckpunkte einer quadratischen Pyramide mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5. Sie verwendet jede der Ziffern genau einmal. Für jede Fläche berechnet Kanga die Summe der Zahlen an den Eckpunkten. Vier dieser Summen sind 7, 8, 9 und 10. Wie groß ist die fünfte Summe?



(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

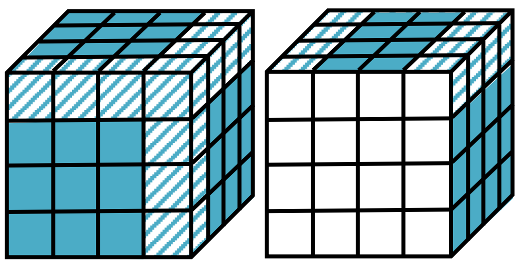
Die Summe der Zahlen an der Basis der Pyramide ist 1+2+3+4=10, somit müssen die Zahlen 7,8 und 9 jedenfalls Summen von Dreiecksflächen der Pyramidenoberfläche sein. Somit kann die Zahl 5 nicht an der Spitze der Pyramide stehen, da ansonsten jede der Dreiecksflächen zumindest den Wert 1+2+5=8 hätte. Damit ist der Wert der Basisfläche der Pyramide zumindest 1+2+3+5=11, also steht die Zahl 10 sicher auf einer Dreiecksfläche der Pyramide. Die vier Dreiecke sind somit mit den Zahlen 7, 8, 9 und 10 beschriftet. Addiert man all diese Zahlen, so werden die Werte an den Eckpunkten der Basis doppelt und der Wert an der Spitze, dieser heiße S, vierfach gezählt. Insbesondere werden also alle Zahlen doppelt und der Wert an der Spitze noch zusätzlich zweimal gezählt:



$2 \cdot (1+2+3+4+5) + 2 \cdot S = 7+8+9+10$
Wir erhalten, dass die Zahl 2 an der Spitze steht. Die Summe der Basisfläche ist somit 1 + 3 + 4 + 5 = **13**, das entspricht der fehlenden fünften Summe. Die Figur zeigt eine mögliche (bis auf Drehung und Spiegelung der Basis eindeutige) Lösung.

26. Ein großer Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln, die alle dieselbe Seitenlänge haben. Drei der Flächen des großen Würfels werden angemalt. Wie groß ist die maximale Anzahl an kleinen Würfeln, bei denen genau eine Seite angemalt ist?
(A) 27 (B) 28 (C) 32 (D) 34 (E) 40

Es gibt 2 unterschiedliche Arten drei Flächen des Würfels vollständig anzumalen. Entweder treffen sich die drei Flächen in einem Eckpunkt des Würfels (linkes Bild) oder nicht (rechtes Bild, eine bemalte Fläche nicht sichtbar). Die Anzahl an kleinen Würfeln mit nur einer bemalten Seite ist maximal, wenn die Anzahl der gemeinsamen Kanten der drei Flächen minimal ist - somit der zweite Fall. Es gibt 40 Würfel, die mindestens an einer Seite angemalt werden. Da die drei angemalten großen Würfelflächen zwei gemeinsame Kanten haben, werden $2 \cdot 4 = 8$ Würfel (schraffiert) an zwei Seiten angemalt.
Alle übrigen 32 Würfel werden nur an einer Seite angemalt.



27. In jedes der Quadrate wird eine Zahl so eingetragen, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich ist. Welche Zahl wird in das graue Feld eingetragen?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Trägt man rechts unten ein *x* ein, folgt die Summe 15+*x*.

Dann ist der fehlende Eintrag in der ersten Zeile 15 + x - (1+6+3) = 5 + x.
Im Feld rechts neben dem grauen Feld steht 15 + x - (5 + x + 2 + 7) = 1.
Im grauen Feld steht somit 15 + x - (1 + 7 + x) = **7**.

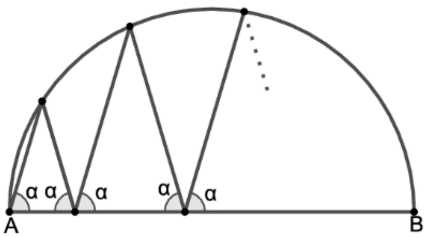
28. Alice, Bella und Cathy veranstalten einen Wettbewerb im Armdrücken. In jeder Runde treten zwei der Mädchen gegeneinander an, das dritte pausiert. Nach jeder Runde tritt die Gewinnerin gegen das Mädchen an, das gerade pausiert hat. Alice tritt 10 Mal an, Bella 15 Mal und Cathy 17 Mal. Wer könnte in der zweiten Runde verloren haben?

(A) nur Alice (B) nur Bella (C) nur Cathy (D) sowohl Alice als auch Bella
(E) sowohl Bella als auch Cathy

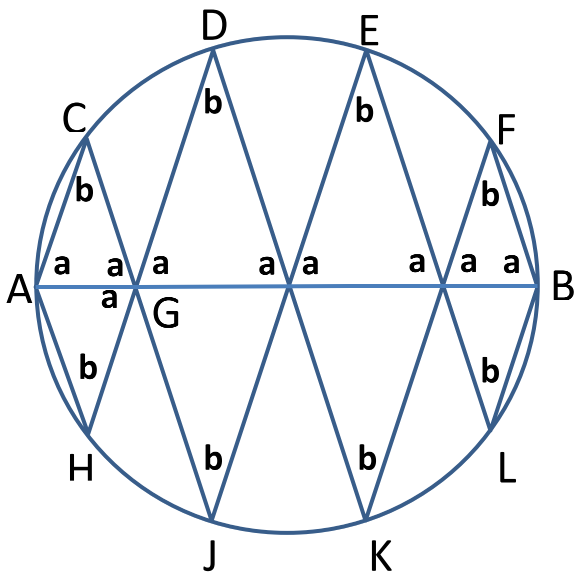
Die Anzahl der Runden ist die Hälfte der Summe der drei gegebenen Antritte 10, 15 und 17. Es fanden also 21 Runden statt. Alice hat nur 10 Antritte, hat also in 11 Runden pausiert und alle ihre Runde verloren. Da man nicht zwei Mal hintereinander pausieren kann, muss sie in der zweiten Runde angetreten sein und verloren haben.
Das ist die einzige Möglichkeit und **nur Alice kann in der zweiten Runde verloren haben**.

29. *AB* ist der Durchmesser eines Kreises. Eine Zickzacklinie startet in Punkt *A* und endet nach vier Spitzen auf dem Kreis im Punkt *B*.
Jeder der Winkel, den die Linie mit dem Durchmesser einschließt, ist α (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Winkel α?

(A) 60° (B) 72° (C) 75° (D) 80° (E) ein anderer Wert



Die Zickzacklinie endet nach genau vier Spitzen in Punkt B. Damit endet die zweite Spitze im Mittelpunkt der Strecke AB und somit im Mittelpunkt des Kreises.
Spiegeln wir die gesamte Figur an dem Durchmesser AB. Die Strecke AC ist parallel zur Strecke HD, da sie mit dem Durchmesser AB jeweils den Winkel α einschließen.
Da die 4 Punkte H, A, C und D auf einem Kreisbogen liegen und die Strecken AC und HD parallel sind, müssen die Strecken AH und CD gleich lang sein (da die entsprechenden Kreisbögen gleich lang sind).
Durch analoge Symmetrieüberlegungen sind die Strecken AC, CD, DE, EF, FB, BL, LK, KJ, JH und HA gleich lang und ACDEFBLKJH ist ein regelmäßiges Zehneck mit dem Innenwinkel 2α. Somit muss α = 144°/2 = **72°** sein.



30. Acht aufeinanderfolgende dreiziffrige positive ganze Zahlen haben die folgende Eigenschaft:
Jede von ihnen ist durch ihre letzte Ziffer teilbar.
Wie groß ist die Ziffernsumme der kleinsten der acht Zahlen?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Jede Zahl ist durch ihre letzte Ziffer teilbar. Das heißt, 0 kann als letzte Ziffer nicht vorkommen. Die letzten Ziffern der 8 Zahlen sind somit entweder zwischen 1 bis 8 oder zwischen 2 bis 9. Zieht man jeweils die entsprechende Einerstelle von den Zahlen ab, erhält man bei allen 8 Zahlen dieselbe Zahl mit der letzten Ziffer 0. Diese muss ebenfalls durch alle 8 Ziffern (entweder 1 bis 8 oder 2 bis 9) teilbar sein, insbesondere durch $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$ (und somit auch durch 6 und 8). Die kleinste Zahl, die das erfüllt ist 840. Jedes Vielfache davon ist zumindest 4-stellig. 840 ist durch 9 nicht teilbar, somit bleiben die Zahlen 841 bis 848, die kleinste hat die **Ziffernsumme 13**.