Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	E	C	B	B	C	B	A	B	B	C	C	C	E	B	D	B	A	C	C	D	E	A	E	B	D	C	C	B

– 3 Punkte Beispiele –

1. $20 \times 19 + 20 + 19 =$

(A) 389 (B) 399 (C) 409 **(D) 419** (E) 429

2. Eine Modelleisenbahn fährt im Kreis. Sie benötigt (bei konstanter Geschwindigkeit) genau 1 Minute und 11 Sekunden für eine Runde. Wie lange braucht sie für sechs Runden?

(A) 6 Minuten 56 Sekunden **(B) 7 Minuten 6 Sekunden** (C) 7 Minuten 16 Sekunden
(D) 7 Minuten 26 Sekunden (E) 7 Minuten 36 Sekunden

Das Sechsfache von 1 Minute 11 Sekunden sind 6 Minuten 66 Sekunden, also 7 Minuten 6 Sekunden.

3. Ein Barbier möchte das Wort SHAVE so auf eine Tafel schreiben, dass ein Kunde, der das Wort im Spiegel sieht, das Wort normal lesen kann. Wie muss er das Wort auf die Tafel schreiben?

(A)  (B)  (C) 
(D)  **(E)** 

Man muss das Wort spiegelverkehrt auf die Tafel schreiben.

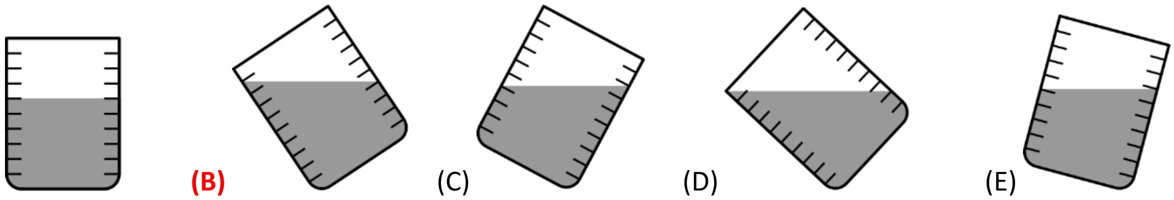
Dadurch wird aus  .

4. Wie viele verschiedene Punktesummen kann man erhalten, wenn man drei gewöhnliche Spielwürfel gleichzeitig wirft?

(A) 14 (B) 15 **(C) 16** (D) 17 (E) 18

Ein gewöhnlicher Spielwürfel trägt auf seinen Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkte. Die kleinste mögliche Punktsumme ist 3 (1+1+1), die größte 18 (6+6+6). Auch die Summen zwischen 3 und 18 kann man erhalten. Damit gibt es 16 verschiedene Punktesummen.

5. Fünf identische Messbecher sind mit Wasser gefüllt. Vier davon enthalten jeweils genau gleich viel Wasser. Welcher Messbecher enthält eine andere Menge?



(A) **(B)** (C) (D) (E)

Bei Messbecher A steht das Wasser auf Höhe der sechsten Markierung. Bei den schräg stehenden Bechern ergibt sich die Höhe, wenn man den Becher aufrecht stellt, als Mittelwert der rechten und linken Markierung. Bei C, D und E ist das bei der sechsten Markierung. Bei B steht das Wasser links bis zur neunten Markierung und rechts bis zur vierten Markierung. Der Mittelwert ist daher größer als sechs. B enthält daher mehr Wasser als die anderen Becher.

6. Ein Park hat fünf Zugänge. Monika möchte durch einen Zugang den Park betreten und durch einen anderen Zugang wieder verlassen. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie den Park betreten und verlassen?

(A) 25 **(B) 20** (C) 16 (D) 15 (E) 10

Unabhängig davon durch welchen der 5 Zugänge Monika den Park betritt, hat sie 4 Wahlmöglichkeiten für den Zugang, durch den sie den Park verlässt. Damit gibt es $5 \cdot 4$ Arten, wie sie den Park betreten und verlassen kann.

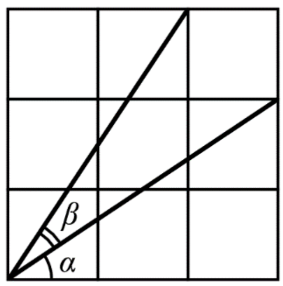
7. Die Masse (in kg) dreier Kängurus ist jeweils eine andere ganze Zahl. Zusammen wiegen sie 97 kg. Wie viel kann das leichteste von ihnen höchstens wiegen?

(A) 1 (B) 30 **(C) 31** (D) 32 (E) 33

Das leichteste Känguru kann nicht mehr wiegen als der Mittelwert aller drei Kängurus, also nicht mehr als 32 1/3 kg. Wiegt das leichteste Känguru 32 kg, dann wiegt das zweite 33 kg und das dritte 34 kg. Das ergibt eine zu große Summe von 99 kg. Daher kann das leichteste Känguru höchstens 31 kg wiegen. Wenn das zweite Känguru 32 kg, das dritte 34 kg wiegt sind alle Voraussetzungen erfüllt.

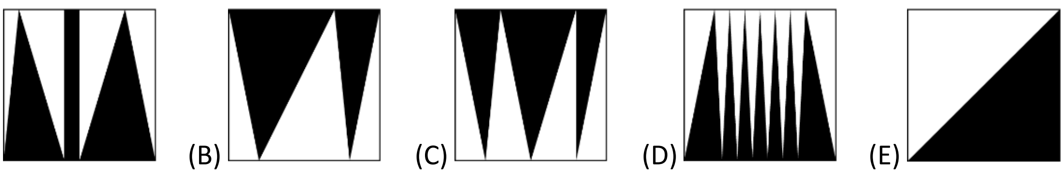
8. Welche der folgenden Aussagen trifft sicher auf die markierten Winkel in der gegebenen aus neun Quadraten zusammengesetzten Figur zu?

(A) $\alpha = \beta$ **(B)** $\boldsymbol{2\alpha + \beta = 90°}$ (C) $\alpha + \beta = 60°$ (D) $2\beta + \alpha = 90°$ (E) $\alpha + \beta = 45°$



Die eingezeichneten Strecken zerlegen das große Quadrat in ein Deltoid und zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlängen 2 und 3. Damit zerlegen die Strecken rechten Winkel in der linken unteren Ecke des Quadrats in die Winkel α, β und noch einmal α, und es gilt $2\alpha + \beta = 90°$.

9. Im Inneren eines Einheitsquadrats wurde ein gewisser Bereich schwarz bemalt. In welchem Quadrat ist der schwarze Teil am größten?



(A) (B) (C) (D) (E)

Durch Einzeichnen von senkrechten Linien durch die Spitzen der Dreiecke wird jede der Figuren B, C, D, E vollständig in Rechtecke zerlegt, die je zur Hälfte schwarz gefärbt sind, d.h. die Figuren sind jeweils als Ganze zur Hälfte schwarz gefärbt. Nur in Figur A gibt es ein vollständig schwarz gefärbtes Teilrechteck. Daher ist der schwarze Teil in Figur A am größten.

10. Julia liest ein Buch, in dem alle Seiten nummeriert sind. Die Ziffer 0 wird sechs Mal und die Ziffer 8 sieben Mal verwendet. Wie lautet die Seitenzahl der letzten Seite?

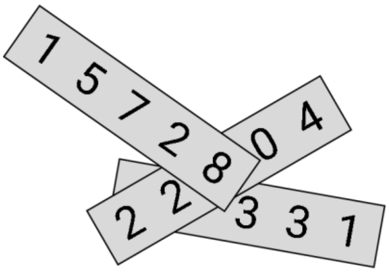
(A) 58 **(B) 68** (C) 70 (D) 78 (E) 98

In den Seitenzahlen kommt die Ziffer „0“ genau sechs Mal (nämlich ausschließlich als Einerziffer) vor. Daher ist die gesuchte Seitenzahl mindestens 60 aber kleiner als 70. Bei der einzig verbliebenen möglichen Seitenzahl 68 kommt die Ziffer 8 tatsächlich siebenmal in einer Seitennummer vor (8, 18, 28,…, 68).

4 Punkte Beispiele

11. Auf drei Papierstreifen wurde jeweils wie abgebildet eine fünfziffrige Zahl geschrieben. Drei der Ziffern sind im Bild verdeckt. Die Summe der drei Zahlen ist 57263. Wie lauten die verdeckten Ziffern?

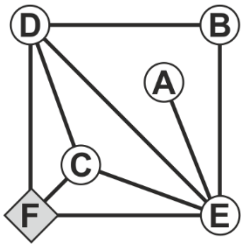
(A) 0, 2 und 2 **(B) 1, 2 und 9** (C) 2, 4 und 9 (D) 2, 7 und 8 (E) 5, 7 und 8



1	5	7	2	8
2	2	**2**	0	4
1	**9**	3	3	1
5	7	2	6	3

12. Anna, Bella, Claire, Dora, Erika und Frieda treffen sich auf einer Party. Je zwei von ihnen, die einander kennen, geben einander genau einmal die Hand. Anna gibt nur einmal die Hand, Bella zwei Mal, Claire drei Mal, Dora vier Mal und Erika fünf Mal. Wie vielen Personen gibt Frieda die Hand?

(A) 1 (B) 2 **(C) 3** (D) 4 (E) 5

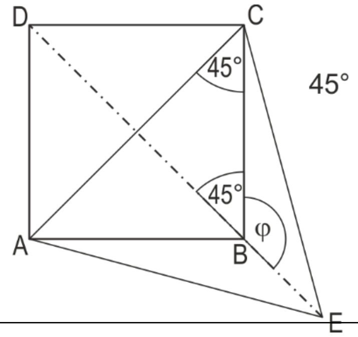


Erika, die jeder der anderen fünf die Hand schüttelt, ist die einzige, der Anna die Hand gibt. Daher gibt Dora allen außer Anna die Hand, d.h. die beiden, denen Bella die Hand schüttelt sind Dora und Erika. Folglich gibt Claire weder Anna noch Bella die Hand, was bedeutet, dass Claire neben Dora und Erika auch Frieda die Hand schüttelt. Somit gibt Frieda Claire, Dora und Erika die Hand, nicht aber Anna und Bella.

13. In einem Quadrat *ABCD* sind die Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn beschriftet. *A* und *C* sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks *AEC*, dessen Eckpunkte ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn beschriftet sind. Wie groß ist der Winkel *EBC*?

(A) 30° (B) 45° **(C) 135°** (D) 145° (E) 150°

Der gesuchte Winkel ergänzt den Winkel CBD = 45°, den die Quadratseite BC mit der Quadratdiagonale BD einschließt, auf 180°. Er beträgt daher 135°.



14. Die Zahlen a, b, c und d sind paarweise verschiedene positive ganze Zahlen aus dem Bereich von 1 bis 10. Was ist der kleinstmögliche Wert des Ausdrucks $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

(A) $\frac{2}{10}$ (B) $\frac{3}{19}$ **(C) $\frac{14}{45}$** (D) $\frac{29}{90}$ (E) $\frac{25}{72}$

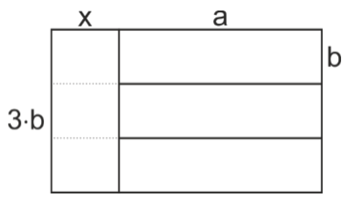
Es ist offensichtlich, dass 1 und 2 als Zähler, 9 und 10 als Nenner der Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zu wählen sind.

Wegen $\frac{1}{9} + \frac{2}{10} = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} < \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{2}{9} + \frac{1}{10}$ ist $\frac{1}{9} + \frac{2}{10} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$ der kleinste Wert, den der Ausdruck $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ unter den gegebenen Voraussetzungen annehmen kann.

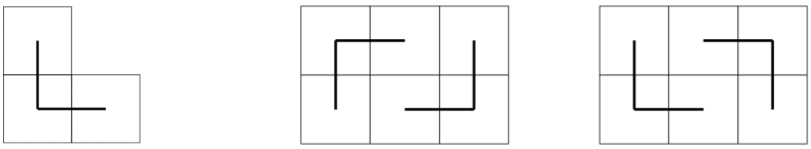
15. Die Flagge von Kanguria ist ein Rechteck, dessen Seitenlängen zueinander im Verhältnis 3: 5 stehen. Die Flagge ist, wie in der Abbildung zu sehen, in vier flächengleiche Rechtecke unterteilt. In welchem Verhältnis stehen die Seiten längen des weißen Rechtecks?

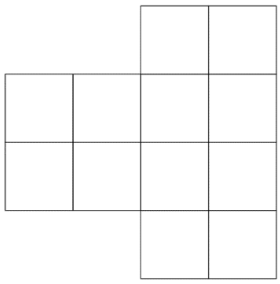
(A) 1 : 3 (B) 1 : 4 (C) 2 : 7 (D) 3 : 10 **(E) 4 : 15**

Weil die vier Teilrechtecke flächengleich sind, gilt $a \cdot b = x \cdot 3b$, also $x = \frac{a}{3}$. Das Verhältnis der Seitenlängen der Flagge ergibt damit $3b : \frac{4a}{3}$ = 3 : 5, also $b : a = 4 : 15$.



16. Ein 3 × 2 Rechteck kann wie abgebildet auf zwei Arten von zwei der abgebildeten L-förmigen Figuren überdeckt werden:

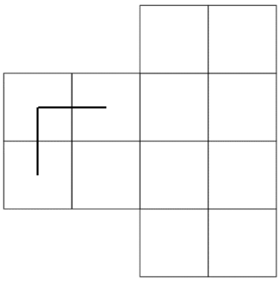
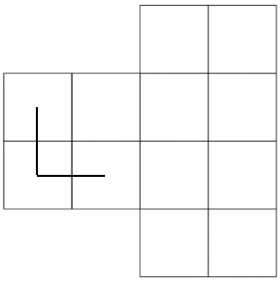


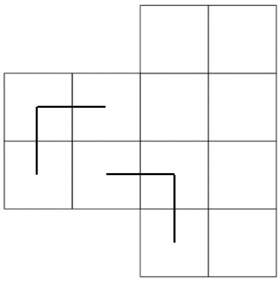


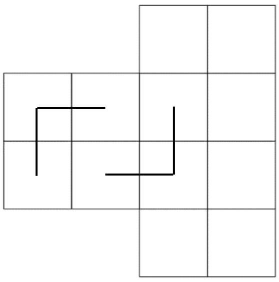
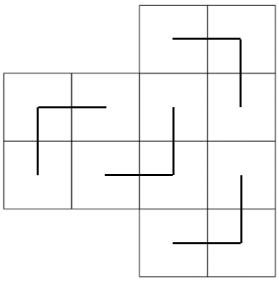
Auf wie viele Arten kann die rechts abgebildete Figur durch die L-förmigen Figuren überdeckt werden?

(A) 1 **(B) 2** (C) 3 (D) 4 (E) 48

Es ist klar, dass im linken Teil eine L-förmige Figur auf eine der beiden Arten liegen muss:

 oder . Diese Arten gehen durch Spiegelung ineinander über. Daher reicht es, eine weiter zu verfolgen.

Im linken 2x2-Quadrat ist noch ein kleines Quadrat frei. Die Variante  führt zu keiner Lösung, da keine L-förmige Figur mehr das rechte untere Quadrat überdecken kann.

Bleibt noch die Variante , die genau eine Lösung liefert: .

Durch Spiegelung erhalten wir eine zweite Lösung.

17. Ein Triathlon besteht aus den drei Bewerben Schwimmen, Laufen und Radfahren. Die Radfahrstrecke beträgt drei Viertel der Gesamtdistanz, die Laufstrecke beträgt ein Fünftel der Gesamtdistanz und die Schwimmstrecke ist 2 km lang. Wie lang ist die Gesamtdistanz des Triathlons in km?

(A) 10 (B) 20 (C) 38 **(D) 40** (E) 60

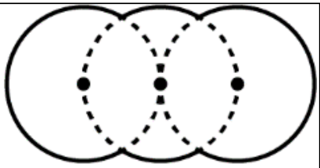
Ist die Gesamtdistanz des Triathlons (in km) gleich x, dann ist die Länge der Radstrecke $\frac{3}{4}x$, die Länge der Laufstrecke $\frac{1}{5}x$ und die Länge der Schwimmstrecke $x - \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}x = \frac{1}{20}x = 2$. Daraus folgt $x = 40$.

18. Eine 1-Liter-Flasche Sirup ist noch halb voll. Der Sirup soll im Verhältnis $1:7$ zu Saft verdünnt werden. Welchen Bruchteil dieses Sirups muss man verwenden, um 2 Liter Saft zu erhalten?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B) $\frac{1}{2}$** (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$ (E) den gesamten Sirup

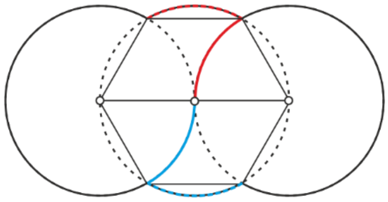
Um 2 Liter Saft zu erhalten, benötigt man $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ Liter Sirup. Die 1-Liter-Flasche ist noch halb voll, enthält also $\frac{1}{2}$ Liter Sirup. Man muss davon die Hälfte verwenden.

19. Die gegebene Figur setzt sich aus drei Kreisen mit gleichem Radius R zusammen. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einer gemeinsamen Geraden, wobei der mittlere Kreis durch die Mittelpunkte der anderen beiden Kreise geht (siehe Abbildung). Wie groß ist der Umfang der Figur?



(A) $\mathbf{\frac{10\pi R}{3}}$ (B) $\frac{5\pi R}{3}$ (C) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ (D) $2\pi R\sqrt{3}$ (E) $4\pi R$

Die rot und blau markierten Kreisbögen sind je genau ein Sechstel eines Kreises. Der Umfang setzt sich damit zusammen aus 2 Kreisen, wobei zweimal so ein Kreisbogen fehlt.



Der Umfang ist daher $2\pi R \cdot \left(2 - \frac{2}{6}\right) = 2\pi R \cdot \frac{5}{3} = \frac{10\pi R}{3}$.

20. Die Summe der sieben Ziffern einer siebenstelligen Telefonnummer $aaabbbb$ ist die zweistellige Zahl ab. Wie groß ist der Wert der Summe $a + b$?

(A) 8 (B) 9 **(C) 10** (D) 11 (E) 12

Der Wert der zweistelligen Zahl ab (also der Zahl mit Zehnerziffer a und Einerziffer b) ist $10a + b$. Daraus folgt, dass $3a + 4b = 10a + b$, $7a = 3b$ und somit (wegen $a, b < 10$) $a = 3$, $b = 7$, $a + b = 10$.

– 5 Punkte Beispiele –

21. Löscht man von einer zweiziffrigen Zahl eine der beiden Ziffern, so ist in beiden Fällen die resultierende Zahl ein Teiler der ursprünglichen Zahl. Wie viele zweiziffrige Zahlen haben diese Eigenschaft?

(A) 5 (B) 9 **(C) 14** (D) 19 (E) 23

Offensichtlich ist keine der Ziffern 0. Betrachten wir nun die zweiziffrige Zahl 10a+b (mit a und b ganze Zahlen zwischen 1 und 9). Es soll nun gelten a|(10a+b) und b|(10a+b). Da a|10a folgt, dass a|b gelten muss. Und aus b|b folgt, dass b|10a gelten muss. Daher kann b=a, b=2a (für a<5) oder b=5a (für a<2) sein.

Das liefert die zweiziffrigen Zahlen 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 und 99.

22. Insgesamt 60 Äpfel und 60 Birnen werden auf mehrere Schachteln verteilt. In jeder Schachtel sollen sich gleich viele Äpfel befinden, aber keine zwei Schachteln sollen gleich viele Birnen enthalten. Jede Schachtel enthält beide Obstsorten. Höchstens wie viele Schachteln können auf diese Art gepackt werden?

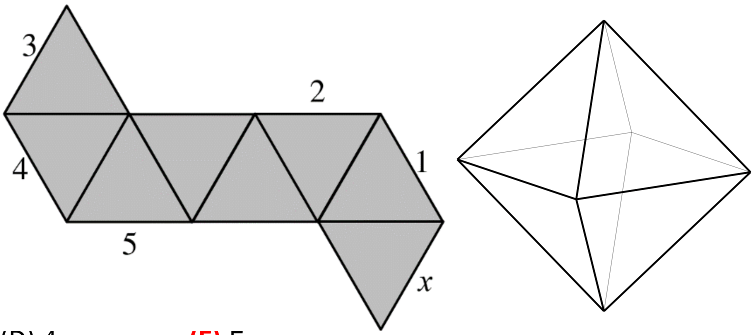
(A) 20 (B) 15 (C) 12 **(D) 10** (E) 6

Die Anzahl an Schachteln, die so gepackt werden können, muss ein Teiler von 60 sein, um die 60 Äpfel gleichmäßig aufteilen zu können.

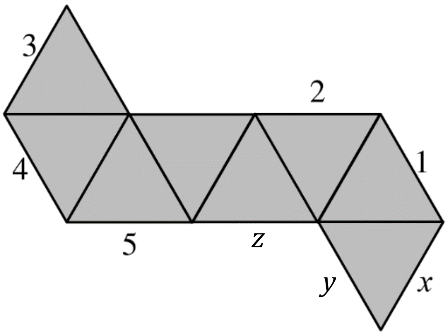
Wenn n Schachteln gepackt werden, benötigt man dafür mindestens $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Birnen, da sonst in zumindest zwei Schachteln gleich viele Birnen wären. Da nur 60 Birnen zur Verfügung stehen, gilt $\frac{n(n+1)}{2} \leq 60$ und daher $n \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{481}{4}} < 11$.

Der größtmögliche Teiler von 60, der kleiner als 11 ist, ist 10.

23. Im Bild ist das Netz eines Oktaeders zu sehen. Welche Kante fällt mit der mit *x* gekennzeichneten Kante zusammen, wenn das Netz zum Oktaeder gefaltet wird?

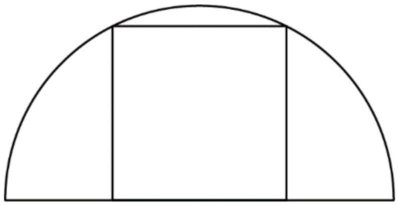


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 **(E) 5**



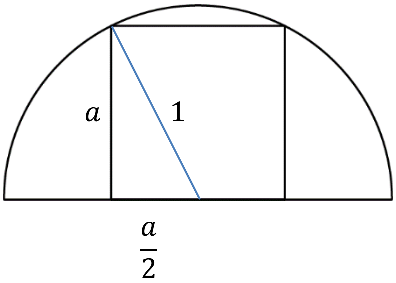
Die Kanten y und z fallen zusammen. Dann fallen die Kanten 5 und x zusammen.

24. Zwei Eckpunkte eines Quadrats liegen wie abgebildet auf einem Halbkreis, während die beiden anderen auf seinem Durchmesser liegen. Der Radius des Kreises ist 1 cm. Wie groß ist die Fläche des Quadrats?



(A) $\frac{4}{5}$ **cm²** (B) $\frac{\pi}{4}$ cm² (C) 1 cm² (D) $\frac{4}{3}$ cm² (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm²

Die Verbindung eines Eckpunktes am Kreis mit dem Mittelpunkt des Kreises ist 1 cm. Für die Seitenlänge a des Quadrats gilt dann $a^2 + \frac{a^2}{4} = 1$ cm² und somit $a^2 = \frac{4}{5}$ cm².



25. Zwei Punkte sind auf einer um ihren Mittelpunkt rotierenden Kreisscheibe markiert. Der äußere Punkt ist um 3 cm weiter vom Mittelpunkt entfernt als der innere Punkt und er bewegt sich 2,5 Mal so schnell ist wie der innere Punkt. Wie groß ist der Abstand des äußeren Punktes vom Mittelpunkt der Kreisscheibe?

(A) 10 cm (B) 9 cm (C) 8 cm (D) 6 cm **(E) 5 cm**

Wenn r der Abstand des inneren Punktes vom Mittelpunkt ist und Rder Abstand des äußeren Punktes, dann gilt $r = R - 3\ cm$.

Da sich der Punkt 2,5 Mal so schnell bewegt, ist der Umfang seiner Kreisbahn (und damit auch der Radius) 2,5 Mal so lang. Es gilt daher $2{,}5 \cdot r = R$ und daher $R - 3\ cm = \frac{R}{2{,}5}$, folglich $R = 5\ cm$.

26. Die ganzen Zahlen von 1 bis 99 werden in aufsteigender Reihenfolge ohne Zwischenraum angeschrieben. Diese Ziffernfolge wird in Tripel (Dreiergruppen) unterteilt:
$123456789101112\cdots979899 \longrightarrow (123)(456)(789)(101)(112)\cdots(979)(899)$.
Welches der folgenden Tripel erhält man nicht?
(A) (222) **(B)** $\mathbf{(444)}$ (C) (464) (D) (646) (E) (888)

Nach den einstelligen Zahlen bilden je drei zweistellige Zahlen $a, a+1, a+2$ (mit $3|a+2$) zwei Tripel.

Aus $3|24$ folgt daher, dass die beiden Tripel (222) und (324) existieren. Ebenso existiert (464) wegen $3|48$, (646) wegen $3|66$ und (888) wegen $3|90$.

Drei Mal die Ziffer 4 taucht nur an der Stelle $41\ 42\ 43\ 44\ 45$ auf. Da $3|45$, werden aber die Tripel folgendermaßen gebildet: … $4)(142)(434)(445)$ … und (444) erhält man daher nicht als Tripel.

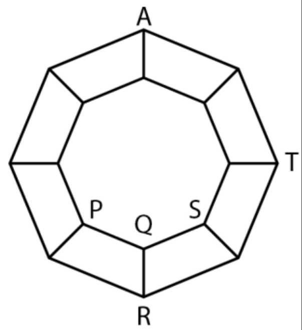
27. Wie viele Ebenen existieren, die durch genau drei Eckpunkte eines gegebenen Würfels gehen?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 **(D) 8** (E) 10

Wenn man zwei Eckpunkte auswählt, die durch eine Kante des Würfels verbunden sind, so kann man keinen dritten Eckpunkt dazu wählen, sodass kein vierter Eckpunkt in der Ebene dieser drei Punkte liegt. Ebenso kann zu zwei Eckpunkten, die auf der gleichen Raumdiagonale des Würfels liegen, kein dritter Eckpunkt gewählt werden, sodass kein vierter Eckpunkt in der Ebene dieser drei Punkte liegt.

Man benötigt also drei Punkte, von denen je zwei auf einer gemeinsamen Seitendiagonale des Würfels liegen. Wählt man einen der acht Eckpunkte, und dazu zwei der drei Eckpunkte, die mit diesem auf einer gemeinsamen Seitendiagonale liegen, so bilden diese drei Punkte eine gesuchte Ebene. Da jeweils einer der drei Eckpunkte, die mit dem ersten auf einer gemeinsamen Seitendiagonale liegen, nicht gewählt wird, liegt jeder Eckpunkt in drei der gesuchten Ebenen.

Wir zählen also für alle acht Eckpunkte je drei Ebenen. Dabei zählen wir jede Ebene drei Mal (ein Mal für jeden der drei Punkte). Es gibt also $\frac{8\cdot3}{3} = 8$ solche Ebenen.

28. Ein Graph besteht aus 16 Punkten und einigen Verbindungsstrecken, wie im Bild zu sehen ist. Eine Ameise befindet sich im Punkt A. Mit jedem Zug kann sich die Ameise vom Punkt, in dem sie sich befindet, längs einer Verbindungsstrecke zu einem benachbarten Punkt bewegen.
In welchem der Punkte P, Q, R, S und T kann sich die Ameise nach 2019 Zügen befinden?



(A) nur in P, R oder S, nicht Q oder T (B) nur in P, R, S oder T, nicht in Q
(C) nur in Q (D) nur in T (E) in allen Punkten

Jeder Kreis (Rundweg) in dem Graphen besteht aus einer geraden Anzahl an Kanten. Teilt man einen Kreis in zwei Abschnitte, so haben die Längen beider Abschnitte die gleiche Parität (also entweder haben beide gerade Länge oder beide ungerade Läge).

Zwei Wege zwischen zwei Punkten X und Y können sich in zwei Punkten voneinander unterscheiden:

- Ein Weg verwendet einen Kreis öfter als der andere.
- Ein Weg verwendet in einem Kreis genau den Abschnitt, den der andere nicht verwendet.

Beides verändert nicht die Parität der Länge des Weges. Folglich haben die Längen aller Wege zwischen zwei Punkten X und Y die gleiche Parität.

Es gibt einen Weg von A nach T in zwei Schritten, also mit gerader Länge. Von A nach S und von A nach P gibt es je einen Weg der Länge vier, von A nach R einen Weg der Länge sechs. Es gibt also keinen Weg mit 2019 Schritten von A nach P, R, S oder T.

Von A nach Q gibt es einen Weg der Länge fünf. Von Q kann die Ameise noch $\frac{2008}{4} = 502$ Mal einen Kreis der Länge vier und einmal einen Kreis der Länge sechs gehen und befindet sich somit nach $5 + 502 \cdot 4 + 6 = 2019$ Schritten in Q.

29. Die Zahlen a, b und c sind dreistellig, und in jeder Zahl ist die erste Ziffer gleich der letzten. Weiters gilt $b = 2a + 1$ und $c = 2b + 1$. Wie viele mögliche Werte gibt es für die Zahl a?

(A) 0 (B) 1 **(C) 2** (D) 3 (E) mehr als 3

Wäre die mittlere Ziffer von a kleiner oder gleich 4, dann wäre in 2a die Einerziffer gleich der Hunderterziffer, also würde 2a+1 nicht die geforderte Form haben. Daher muss die mittlere Ziffer mindestens 5 sein.

Wäre die erste und dritte Ziffer von a größer oder gleich 2, dann wäre a ≥ 250, demnach b = 2a + 1 ≥ 501 und c = 2b+1 ≥ 1003, ein Widerspruch zur Dreistelligkeit.

Daher ist die erste und letzte Ziffer von a gleich 1. Auch bei b muss mit derselben Überlegung die mittlere Ziffer mindestens 5 sein. Das ist nur dann erfüllt, wenn die mittlere Ziffer von a gleich 8 oder 9 ist.

Tatsächlich liefern beide Fälle Lösungen für (a, b, c), nämlich (181, 363, 727) und (191, 383, 767)

30. Wie viele Elemente müssen aus der Menge $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ mindestens entnommen werden, damit das Produkt der in der Menge verbleibenden Elemente eine Quadratzahl ist?

(A) 1 **(B) 2** (C) 3 (D) 4 (E) 5

Eine Zahl ist genau dann eine Quadratzahl, wenn jeder der Primfaktoren mit gerader Potenz in der Primfaktorzerlegung vorkommt.

Das Produkt aller Elemente der Menge ist $10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 \cdot 80 \cdot 90 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \cdot 7^1$. Der Faktor 7 kommt genau dann mit gerader Potenz im Produkt der verbleibenden Elemente der Menge vor, wenn wir die Zahl 70 entnehmen. Es muss also in jedem Fall die 70 entnommen werden.

Dadurch reduziert sich das Produkt auf $2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^9 \cdot 7^0$. Nun sind die Potenzen der Faktoren 2 und 5 ungerade. Wenn nun ein Element der Menge gefunden wird, in deren Primfaktorzerlegung die Faktoren 2 und 5 mit ungerader, der Faktor 3 mit gerader Potenz vorkommen und dieses entnommen wird, so bleibt als Produkt der verbleibenden Elemente eine Quadratzahl.

Solche Elemente der Menge sind $10 = 2^1 \cdot 5^1$, $40 = 2^3 \cdot 5^1$, $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Wenn also zum Beispiel die Elemente 70 und 90 aus der Menge entnommen werden, so ist das Produkt der verbleibenden Zahlen $10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 80 = 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5^8 \cdot 7^0 = (2^7 \cdot 3 \cdot 5^4)^2 = 240000^2$ eine Quadratzahl.

Es müssen somit mindestens 2 Elemente entnommen werden!