Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018 – Lösungen

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welches Ergebnis liefert die Rechnung $(20+18):(20-18)$?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 34 (E) 36

Lösung: $(20+18):(20-18) = 38:2 = 19$ **Lösung B**

2. Werden die Buchstaben des Wortes MAMA untereinander geschrieben, dann besitzt das Wort eine senkrechte Symmetrieachse. Für welches der folgenden Wörter gilt dasselbe?

(A) ADAM (B) BAUM (C) BOOT (D) LOGO (E) TOTO

Lösung: Eine senkrechte Symmetrieachse gibt es nur dann, wenn jeder einzelne Buchstabe eine senkrechte Symmetrieachse hat. Die Buchstaben D, B, L und G haben keine, also hat nur das Wort TOTO eine senkrechte Symmetrieachse, wenn man die Buchstaben untereinander schreibt. **Lösung E**

3. Ein Dreieck ABC hat die Seitenlängen 6 cm, 10 cm und 11 cm. Ein gleichseitiges Dreieck XYZ besitzt den gleichen Umfang wie das Dreieck ABC. Welche Seitenlänge hat das Dreieck XYZ?

(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 27 cm

Lösung: Das Dreieck ABC hat wie das gleichseitige Dreieck XYZ den Umfang $6+10+11=27$ (in cm). Wegen $27:3=9$ hat das Dreieck XYZ die Seitenlänge 9 cm. **Lösung B**

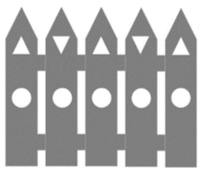
4. Welche Zahl muss man in der Gleichung für ☆ einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

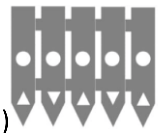
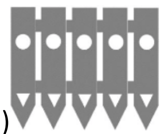
2 · 18 · 14 = 6 · ☆ · 7

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

Lösung: ☆ $= \frac{2\cdot18\cdot14}{6\cdot7} = 12$ **Lösung D**

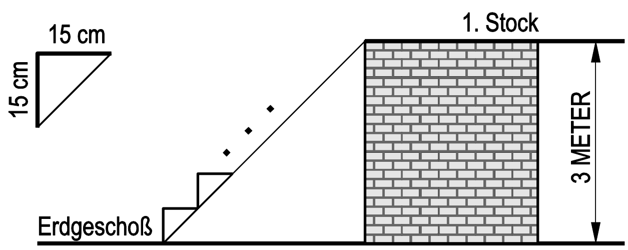
5. Der rechts abgebildete Zaun hat viele Löcher. Eines Morgens fällt der Zaun um und liegt auf dem Boden. Welches der folgenden Bilder zeigt den umgefallenen Zaun?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

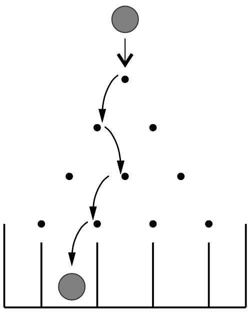
Lösung: Im 1., 3. und 5. Brett zeigen des Zauns zeigen die dreieckigen Löcher nach oben, also zu den Spitzen der Bretter, im 2. Und 4. Brett nach unten. Die runden Löcher sind dem oberen Querbrett/den Spitzen des Zauns näher als dem unteren Querbrett. **Lösung C**

6. Bernd stellt für den Bau einer Stiege Stufen her, die 15 cm hoch und 15 cm tief sind (siehe Abbildung). Die Stiege soll vom Erdgeschoß bis in den ersten Stock reichen, welcher 3 m höher liegt. Wie viele Stufen muss Bernd herstellen?



(A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25

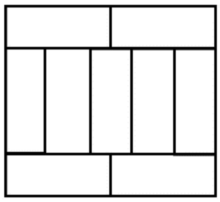
Lösung: Jede Stufe ist 15 cm hoch. Weil die Stiege einen Höhenunterschied von 3 m = 300 cm überwinden muss, werden $300 : 15 = 20$ Stufen benötigt. **Lösung D**



7. Bei einem Glücksspiel wird eine fallende Kugel von eingeschlagenen Nägeln jeweils entweder zum unmittelbar rechts oder links darunterliegenden Nagel abgelenkt. Ein möglicher Weg ist in der Abbildung dargestellt. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann der Ball in das zweite Fach von links gelangen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

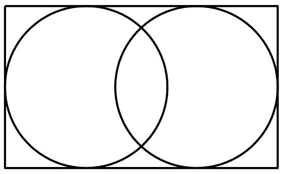
Lösung: Um in das zweite Fach von links zu gelangen, muss die Kugel genau dreimal nach links und einmal nach rechts abgelenkt werden. Diese eine Ablenkung nach rechts kann am obersten Nagel oder in der zweiten, dritten oder vierten Nagelreihe geschehen. Daher gibt es 4 verschiedene Wege. **Lösung C**



8. Ein großes Rechteck wird aus 9 gleich großen Rechtecken gebildet. Die längere Seite jedes kleinen Rechtecks ist 10 cm lang. Welchen Umfang besitzt das große Rechteck?

(A) 40 cm (B) 48 cm (C) 76 cm (D) 81 cm (E) 90 cm

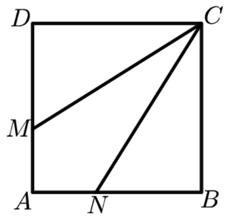
Lösung: Die Länge des großen Rechtecks ist doppelt so groß wie die Länge eines kleinen Rechtecks, beträgt also 20 cm. Weil diese Länge gleichzeitig fünfmal so groß wie die Breite eines kleinen Rechtecks ist, ist jedes kleine Rechteck 4 cm breit. Daher beträgt die Breite des großen Rechtecks $2 \cdot 4 + 10 = 18$ cm, der Umfang des Rechtecks ist also $2 \cdot (20 + 18) = 76$ cm. **Lösung C**



9. In einem 11 cm langen und 7 cm breiten Rechteck werden zwei Kreise so eingezeichnet, dass sie jeweils drei Seiten des Rechtecks berühren. Wie groß ist der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise?

(A) 1 cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) 4 cm (E) 5 cm

Lösung: Weil beide Kreise die obere und untere Seite des Rechtecks berühren, ist ihr Radius halb so groß wie die Breite des Rechtecks, beträgt also 3,5 cm. Somit sind ihre Mittelpunkte 3,5 cm von der linken beziehungsweise 3,5 cm von der rechten Seite des Rechtecks entfernt. Daher ist der Abstand ihrer Mittelpunkte $11 - 2 \cdot 3{,}5 = 4$ cm. **Lösung D**



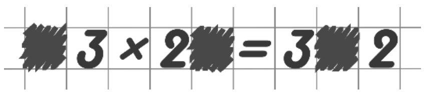
10. Das Quadrat ABCD hat eine Seitenlänge von 3 cm. Die Punkte M und N, die auf den Seiten AD bzw. AB liegen, werden mit der Ecke C verbunden. Dadurch wird das Quadrat in drei Teile mit gleichem Flächeninhalt geteilt. Wie lang ist die Strecke DM?

(A) 0,5 cm (B) 1 cm (C) 1,5 cm (D) 2 cm (E) 2,5 cm

Lösung: Weil die rechtwinkligen Dreiecke NBC und MCD denselben Flächeninhalt haben und wegen $\overline{BC} = \overline{CD}$ gilt auch $\overline{NB} = \overline{MD}$ und $\overline{AN} = \overline{AM}$. Daher ist das Viereck ANCM ein Deltoid mit Symmetrieachse AC. Dieses Deltoid hat denselben Flächeninhalt wie das Dreieck NBC und das Dreieck MCD, wenn die Fläche des Dreiecks ACM halb so groß ist wie die des Dreiecks MCD. Weil die „Höhe“ des Punktes C (über AM bzw. MD) in beiden Dreiecken dieselbe ist, muss also DM doppelt so lang wie AM sein. Wegen AD = 3 cm gilt AM = 1 cm und DM = 2 cm.

Anders kann man auch folgendermaßen argumentieren: Das Quadrat hat einen Flächeninhalt von 9cm², daher hat jeder der drei gleich großen Teile einen Inhalt von 3cm². Das Dreieck CDM hat die Höhe DC = 3cm. Wegen "Fläche = Grundlinie mal Höhe Drittel" muss die Grundlinie DM genau 2cm lang sein. **Lösung D**

- 4 Punkte Beispiele -



11. Martina multipliziert zwei zweistellige Zahlen und übermalt danach einige Ziffern. Wie groß ist die Summe der drei Ziffern, die Martina übermalt hat?

(A) 5 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 14

Lösung: Die Einerziffer des zweiten Faktors ergibt – multipliziert mit der Einerziffer 3 des ersten Faktors – ein Produkt, das auf 2 endet. Das ist nur möglich, wenn der zweite Faktor auf 4 endet. Daher ist der zweite Faktor gleich

24. Weil das Produkt kleiner als 400 ist, muss der erste Faktor kleiner als 20 sein. Daher hat Martina das Produkt von 13 und 24 berechnet, wegen $13 \cdot 24 = 312$ sind 1, 4 und 1 die übermalten Ziffern; $1 + 4 + 1 = 6$. **Lösung B**

12. Ein Rechteck wird in 40 gleich große Quadrate geteilt. Das Rechteck besteht aus mehr als einer Reihe von Quadraten. Andreas bemalt alle Quadrate der mittleren Reihe. Wie viele Quadrate hat er nicht bemalt?

(A) 20 (B) 30 (C) 32 (D) 35 (E) 39

Lösung: Eine eindeutige mittlere Reihe gibt es nur dann, wenn die Anzahl aller Reihen ungerade ist. Die Anzahl der Reihen muss darüber hinaus ein Teiler von 40 größer als 1 sein, also besteht das Rechteck aus 5 Reihen, und die mittlere Reihe besteht aus 8 Quadraten. Daher hat Andreas 32 Quadrate nicht bemalt. **Lösung C**

13. Philipp möchte auf ein halbes Gramm genau wissen, wie viel ein Buch wiegt. Seine Waage zeigt jedoch nur auf 10 g genau an, und darum wiegt er mehrere identische Bücher gemeinsam. Wie viele der identischen Bücher muss er mindestens auf die Waage legen, um sein Vorhaben zu erreichen?

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 50

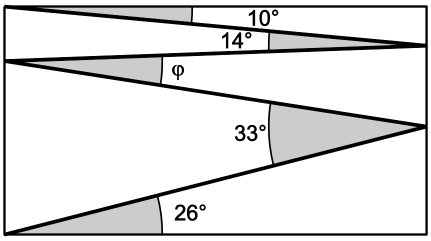
Lösung: Es genügt sicher, 20 Bücher auf die Waage zu legen: Wiegt ein Buch x Gramm, so wiegen 20 Bücher 20x Gramm. Diese Masse kann man auf 10 Gramm genau ablesen, damit kann man die Masse eines Buchs auf 0,5 Gramm genau bestimmen.
Es genügt nicht, 15 Bücher abzuwiegen: Nehmen wir an, ein Buch wiegt x Gramm, dann zeigt die Waage für 15 Bücher einen Wert zwischen 15x - 10 Gramm und 15x + 10 Gramm an. Dividiert man durch 15, erhält man daher einen Wert zwischen x - 0.67 Gramm und x + 0.67 Gramm; im schlimmsten Fall liegt man also um bis zu 0.67 Gramm daneben. (Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass dasselbe Problem auch noch bei 19 Büchern auf der Waage auftritt.)
Lösung D

14. Ein Löwe versteckt sich in einem von drei Zimmern. Auf der Tür zu Zimmer 1 steht: „Der Löwe ist hier“. Auf der Tür zu Zimmer 2 steht: „Der Löwe ist nicht hier“. Auf der Tür zu Zimmer 3 steht „2 + 3 = 2 x 3“. Genau eine der drei Aufschriften ist wahr. In welchem Zimmer befindet sich der Löwe?

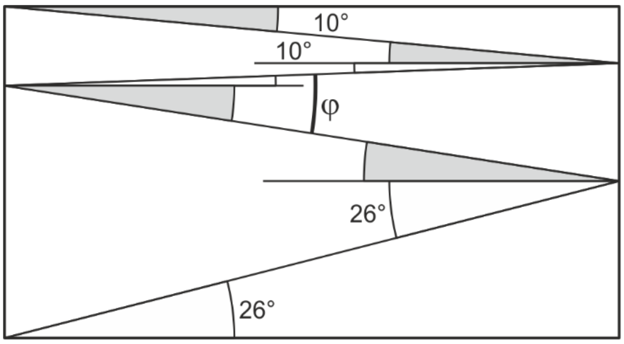
(A) Zimmer 1 (B) Zimmer 2 (C) Zimmer 3
(D) Er kann in jedem Zimmer sein. (E) Er ist entweder in Zimmer 1 oder Zimmer 2.

Lösung: Die Aufschrift „2 + 3 = 2 x 3“ auf der Tür zu Zimmer 3 ist offensichtlich falsch, also ist entweder die Aufschrift auf Tür 1 oder die Aufschrift auf Tür 2 die einzige wahre.
Auf Tür 1 steht die Wahrheit genau dann, wenn sich der Löwe in Zimmer 1 befindet. Dann ist er nicht in Zimmer 2, also steht auch auf Tür 2 die Wahrheit im Widerspruch dazu, dass genau eine Aufschrift wahr ist.
Daher steht die Wahrheit nur auf Tür 2, der Löwe befindet sich also sicher nicht in Zimmer 2. Wäre er in Zimmer 1, dann wäre auch die Aufschrift auf Tür 1 wahr.
Somit befindet sich der Löwe in Zimmer 3. **Lösung C**

15. Valentin zeichnet in einem Rechteck eine Zick-Zack-Linie wie im Bild. Er verwendet dabei die Winkel 10°, 14°, 33° und 26°. Wie groß ist der Winkel φ ?



(A) 11° (B) 12° (C) 16° (D) 17° (E) 33°



Lösung: Die Summe der drei Winkel auf der linken Seite stimmt mit der Summe auf der rechten Seite überein: Zeichnet man Parallele zu den „waagrechten“ Rechteckseiten durch die Scheitel aller markierten Winkel ein, so gibt es zu jedem entstehenden Teilwinkel auf der rechten Seite genau einen gleich großen Parallelwinkel auf der linken Seite. Daher ist die Summe aller Winkel auf der linken Seite gleich der Summe aller Winkel auf der rechten Seite und es gilt
$\varphi + 10° + 26° = 14° + 33°$, also $\varphi = 11°$. **Lösung A**

16. Alice schreibt drei Primzahlen auf, die alle kleiner als 100 sind. Dabei verwendet sie nur die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5, und zwar jede dieser Ziffern genau einmal. Welche der folgenden Primzahlen hat Alice ganz sicher aufgeschrieben?

(A) 2 (B) 5 (C) 31 (D) 41 (E) 53

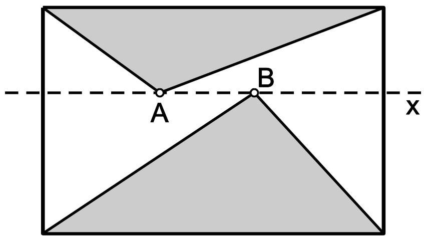
Lösung: Weil keine Zahl mit Einerziffer 4 eine Primzahl ist, kann Alice die Ziffer 4 nur als Zehnerziffer einer Primzahl verwendet haben. Weil 42 und 45 keine Primzahlen sind, hat sie also sicher entweder 41 oder 43 aufgeschrieben. Angenommen, sie hat 43 aufgeschrieben. 1 ist keine Primzahl, also müsste sie eine Primzahl entweder aus den Ziffern 1 und 2 oder aus den Ziffern 1 und 5 gebildet haben. Das ist nicht möglich, weil keine der in Frage kommenden Zahlen 12, 15, 21, 51 eine Primzahl ist. Also hat sie sicher die Primzahl 41 aufgeschrieben. Insgesamt hat sie entweder 5, 23, 41 oder 2, 41, 53 aufgeschrieben. (Beachte: Die Zahl 43 kann auch dadurch ausgeschlossen werden, dass sie unter den Antwortmöglichkeiten nicht vorkommt.) **Lösung D**

17. Ein Hotel in der Karibik wirbt zurecht mit dem Slogan: „350 Sonnentage in jedem Jahr!" Wie viele Tage muss Herr Fröhlich in einem Jahr mit 365 Tagen in diesem Hotel verbringen, um sicher zwei aufeinanderfolgende Sonnentage genießen zu können?

(A) 17 (B) 21 (C) 31 (D) 32 (E) 35

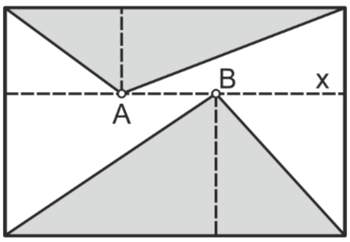
Lösung: Wenn tatsächlich 350 von 365 Tagen sicher Sonnentage sind, dann muss Herr Fröhlich mit höchstens 15 Tagen ohne Sonnenschein rechnen. Wenn er nur 31 Tage im Hotel verbringt, dann könnten sich, beginnend mit einem Sonnentag, Sonnentage und Tage ohne Sonnenschein abwechseln, und er hätte keine Garantie für zwei auf einander folgende Sonnentage. Mit 32 Tagen kann er aber garantiert zwei aufeinanderfolgende Sonnentage während des Aufenthalts genießen. **Lösung D**

18. Die Abbildung zeigt ein Rechteck und eine Gerade x, die parallel zu einer Rechteckseite ist. Auf x liegen zwei Punkte A und B innerhalb des Rechtecks. Die Summe der Flächeninhalte der beiden grau gefärbten Dreiecke beträgt 10 cm². Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?



(A) 18 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 22 cm^2 (D) 24 cm^2

(E) Es hängt von der Lage der Punkte A und B ab.



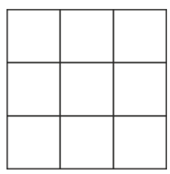
Lösung 1: Unterteilt man das untere graue Dreieck durch eine Strecke durch B normal zu x, das obere graue Dreieck durch eine Strecke durch A normal zu x jeweils in zwei rechtwinklige Dreiecke, so erkennt man, dass jedes der vier entstehenden rechtwinkligen Dreiecks halb so groß ist wie eines der vier durch x und eine der Normalen begrenzten Teilrechte des großen Rechtecks. Daher nehmen die grauen Dreiecke zusammen die halbe Rechtecksfläche ein.

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt somit $2 \cdot 10$ cm² = 20 cm².

Lösung 2: Die Flächeninhalte der grauen Dreiecke sind unabhängig von der Lage der Punkte A und B auf x, weil die Gerade x parallel zu zwei Seiten des Rechtecks ist. Daher können A und B jeweils auf eine der beiden senkrechten Seiten verschoben werden, und es ist klar, dass das untere Dreieck den halben Flächeninhalt des unter x liegenden Teils des Rechtecks, das obere Dreieck den halben Flächeninhalt des über x liegenden Teils des Rechtecks hat. Daher ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie die Summe der beiden Dreiecksflächen, beträgt also 20 cm².

Lösung B

19. Jakob schreibt in jedes Feld einer 3x3 Tabelle eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9. Dann berechnet er die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte. Fünf seiner Ergebnisse lauten 12, 13, 15, 16 und 17. Wie lautet die sechste Summe?



(A) 17 (B) 16 (C) 15 (D) 14 (E) 13

Lösung: Die Summe der natürlichen Zahlen 1 bis 9 ist 45. In der Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte kommt jede dieser Zahlen genau zweimal vor, damit ist Summe aller 6 möglichen Ergebnisse $2 \cdot 45 = 90$. Die sechste Summe ist also gleich $90 - (12 + 13 + 15 + 16 + 17) = 17$.

Eine mögliche Anordnung, die diese Bedingungen erfüllt ist 9 – 2 – 6 in der ersten Zeile, 7 – 5 – 4 in der zweiten und 1 – 8 – 3 in der dritten. **Lösung A**

20. Auf einer geraden Linie werden von links nach rechts 11 Punkte markiert und ihre Abstände festgehalten. Die Summe der Abstände des ersten Punktes zu jedem der anderen Punkte beträgt 2018. Die Summe aller Abstände zwischen dem zweiten Punkt und allen anderen, inklusive des ersten Punktes, beträgt 2000. Welchen Abstand besitzen der erste und der zweite Punkt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Es sei x der Abstand zwischen erstem und zweitem Punkt. Dann ist die Summe der Abstände vom ersten Punkt zu allen anderen Punkten einerseits gleich 2018, andererseits gleich $2000 + 9x$: In der ersten Summe ist der Abstand zwischen erstem und zweitem Punkt schon berücksichtigt; jeder Abstand eines der neun weiter rechts liegenden Punkte (3., 4., 5., … , 11. Punkt) vom ersten Punkt ist um x größer als der entsprechende Abstand vom zweiten Punkt. Aus $2000 + 9x = 2018$ folgt unmittelbar $x = 2$. **Lösung B**

- 5 Punkte Beispiele -

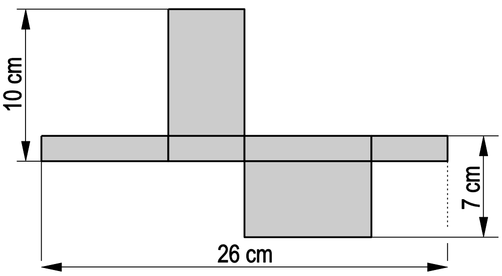
21. Bei einer Schulsprecherwahl gibt es drei Kandidaten. Es haben 130 Schüler gewählt. Die Wahl gewinnt jener Kandidat, der die meisten Stimmen bekommt. Derzeit haben Samuel 24, Kevin 29 und Alfred 37 Stimmen. Wie viele der noch nicht ausgezählten Stimmen muss Alfred mindestens bekommen, um die Wahl sicher zu gewinnen?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Lösung: Falls Kevin zu seinen aktuell 29 Stimmen keine weiteren mehr erhält, fällt die Entscheidung der Wahl zwischen Alfred und Samuel, und Alfred braucht für den sicheren Wahlsieg mehr als die Hälfte der nicht auf Kevin entfallenen Stimmen, also mehr als die Hälfte von 130 – 29 = 101 Stimmen und somit mindestens 51. Dazu müsste er noch 14 Stimmen mehr bekommen.
Falls Samuel zu seinen aktuell 24 Stimmen keine weiteren mehr erhält, fällt die Entscheidung der Wahl zwischen Alfred und Kevin, und Alfred braucht für den sicheren Wahlsieg mehr als die Hälfte der nicht auf Samuel entfallenen Stimmen, also mehr als die Hälfte von 130 – 24 = 106 Stimmen und somit mindestens 54. Dazu benötigt er noch 17 weitere Stimmen.
Somit ist ihm mit 17 mindestens weiteren Stimmen jedenfalls der Wahlsieg sicher. **Lösung E**

22. In der Abbildung siehst du das aus Rechtecken bestehende Netz einer Schachtel. Wie groß ist das Volumen der Schachtel?

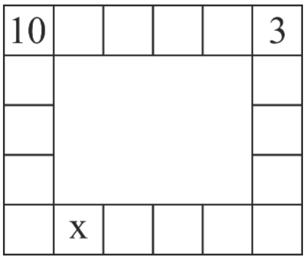
(A) 43 cm^3 (B) 70 cm^3 (C) 80 cm^3 (D) 100 cm^3 (E) 1820 cm^3



Lösung: Bezeichnet man Länge, Breite und Höhe der Schachtel mit a, b und h, so ergeben sich aus der Abbildung die Gleichungen

$$2 \cdot (a + b) = 26, \qquad a + h = 10, \qquad b + h = 7.$$

Wegen der zweiten und dritten Gleichung ist die Länge a um 3cm größer als die Breite b. Weil die Summe von Länge und Breite aufgrund der ersten Gleichung gleich 13 cm ist, erhalten wir als Länge der Schachtel a = 8 cm und als Breite der Schachtel b = 5 cm. Aus der zweiten oder dritten Gleichung folgt dann h = 2cm. Wegen $8 \cdot 5 \cdot 2 = 80$ hat die Schachtel ein Volumen von 80 cm³. **Lösung C**

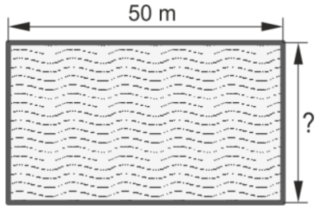


23. Rita möchte in jedes Quadrat der abgebildeten Figur eine Zahl schreiben. Jede Zahl soll dabei gleich der Summe der Zahlen sein, die in den benachbarten Quadraten stehen. Quadrate sind benachbart, wenn sie eine Seite gemeinsam haben. Zwei Zahlen hat sie bereits eingetragen. Welche Zahl wird sie in das Quadrat schreiben, das mit x bezeichnet ist?

(A) 10 (B) 7 (C) 13 (D) -13 (E) -3

Lösung: Steht rechts von 10 die Zahl a, dann stehen in den weiteren Quadraten am oberen Rand der Reihe nach die Zahlen a-10, -10, -a und 3. Daraus folgt a = 7, also stehen am oberen Rand der Figur von links nach rechts die Zahlen 10, 7, -3, -10, -7, 3.
Unterhalb von 10 stehen daher der Reihe nach 3, -7, -10 und (in der linken unteren Ecke) -3. Folglich steht im mit x markierten Quadrat die Zahl 7. **Lösung B**

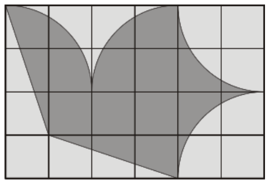
24. Simon läuft entlang des Randes rund um einen 50 m langen rechteckigen Swimmingpool, während Jan gleichzeitig Längen des Pools schwimmt. Simon läuft dreimal so schnell, wie Jan schwimmt. Während Jan 6 Längen schwimmt, schafft Simon 5 Runden um den Pool. Wie breit ist der Swimmingpool?



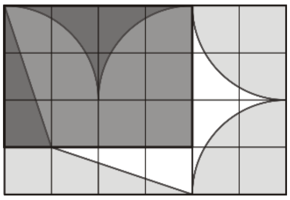
(A) 25 m (B) 40 m (C) 50 m (D) 80 m (E) 180 m

Lösung: Mit der dreifachen Geschwindigkeit von Jan würde Simon in der Zeit, in der Jan 6 Längen schwimmt, 18 Längen laufen. Tatsächlich läuft er 5 Runden um den Pool, als 10 Längen und 10 Breiten. Daher sind 8 Längen gleich lang wie 10 Breiten. Bei einer Länge von 50 m ist der Pool somit 40 m breit. **Lösung B**

25. Lisas Flugverein gestaltet eine Fahne mit einer fliegenden „Taube“ auf einem 4x6 Raster. Die Fläche der „Taube“ beträgt 192 cm². Der Umfang der „Taube“ ist aus geraden Strecken und Kreisbögen zusammengesetzt. Welche Maße hat die Fahne?

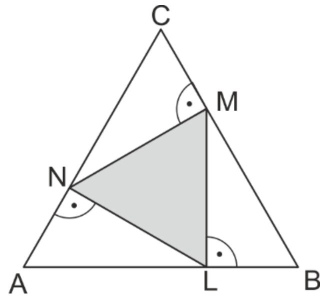


(A) 6 cm x 4 cm (B) 12 cm x 8 cm (C) 20 cm x 12 cm
(D) 24 cm x 16 cm (E) 30 cm x 20 cm



Lösung: Durch geschicktes Zerlegen und Neuanordnen der Teile, die die Taube darstellen, erkennt man, dass die Fläche der Taube der Gesamtfläche von 12 (quadratischen) Rasterfeldern entspricht. Somit beträgt die Fläche eines Rasterquadrats 16 cm², und jedes Rasterquadrat hat eine Seitenlänge von 4 cm. Daher hat die Fahne die Maße 24 cm x 16 cm. **Lösung D**

26. Die Punkte N, M und L liegen auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC so, dass NM ⊥ BC, ML ⊥ AB und LN ⊥ AC gilt. Die Fläche des Dreiecks ABC beträgt 36 cm². Welche Fläche besitzt das Dreieck LMN?



(A) 9 cm² (B) 12 cm² (C) 15 cm² (D) 16 cm² (E) 18 cm²

Lösung: Wegen NM ⊥ BC und LN ⊥ AC ist ∠LNM ein Normalwinkel von ∠ACB und misst daher 60°. Ebenso sind auch die zwei anderen Winkel im Dreieck LMN 60°-Winkel, also Ist LMN ein gleichseitiges Dreieck, und es gilt LM = MN = NL.
Daher sind die Dreiecke ALN, BML und CNM deckungsgleiche rechtwinklige Dreiecke, und weil ihre Winkel genau 30°, 60° und 90° betragen, entstehen sie durch Zerschneiden eines gleichseitigen Dreiecks längs einer Symmetrieachse. Somit sind ihre (gleich langen) kürzeren Katheten (AN = BL = CM) halb so lang wie ihre Hypotenusen (AL = BM = CN). Daher gilt AL : LB = BM : NC = CN : NA = 2 : 1 und AL : AB = BM : BC = CN : CA = 2 : 3. Fügen wir zwei dieser rechtwinkligen Dreiecke geeignet an einander, so erhalten wir also ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge sich zu der des Dreiecks ABC wie 2 : 3 verhält. Daher ist das Verhältnis ihrer Flächeninhalte gleich 2² : 3² = 4 : 9. Folglich verhält sich die Fläche eines der rechtwinkligen Dreieck zur Fläche von ABC wie 2 : 9, die Summe der Flächen der drei rechtwinkligen Dreiecke zur Fläche von ABC also wie 6 : 9 bzw. 2 : 3.
Die Fläche von LMN verhält sich somit zur Fläche von ABC wie 1 : 3, beträgt also 12 cm². **Lösung B**

27. Anna, Bettina und Claudia gehen einkaufen. Bettina gibt um 85% weniger aus als Claudia. Anna gibt um 60% mehr aus als Claudia. Zusammen kaufen sie um 55 € ein. Wie viel Geld gibt Anna aus?

(A) 3 € (B) 20 € (C) 25 € (D) 26 € (E) 32 €

Lösung: Angenommen, Claudia gibt x € aus. Dann sind die Beträge, die Bettina beziehungsweise Anna (in €) ausgeben, 0,15·x beziehungsweise 1,6·x. Daher erhalten wir für ihre Gesamtausgaben

$$0{,}15 \cdot x + x + 1{,}6 \cdot x = 55$$

und damit $2{,}75 \cdot x = 55, \quad x = 20.$
Claudia gibt also 20 € aus; Anna gibt um 60% mehr als Claudia aus, also um 12 € mehr, das sind 32 €. **Lösung E**

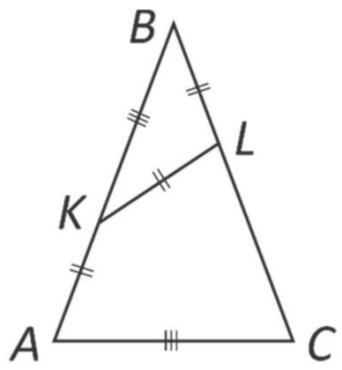
28. Viola übt Weitspringen. Im Mittel sprang sie bisher 3,80 m. Beim nächsten Sprung erreicht sie 3,99 m und so steigt ihr Mittel auf 3,81 m. Welche Weite muss sie beim nächsten Sprung erreichen, damit ihr Mittel auf 3,82 m steigt?

(A) 3,97 m (B) 4,00 m (C) 4,01 m (D) 4,03 m (E) 4,04 m

Lösung: Der tolle Sprung von 3,99 m ist 18 cm besser als der neue Mittelwert von 3,81 m. Da der alte Mittelwert um 1 cm niedriger war, hat dieser Supersprung 18 „schlechtere" Sprünge ausgeglichen.
Um von 3,81 m auf 3,82 m im Mittel zu kommen, müssen nun 19 Sprünge, die im Mittel um 1 cm zu klein sind, durch einen neuerlichen noch weiteren Supersprung ausgeglichen werden. Dieser muss um 19 cm besser als der neue Mittelwert sein.
Viola muss also 3,82 m + 19 cm = 4,01 m springen. **Lösung C**

29. Im gleichschenkeligen Dreieck ABC (mit Basis AC) werden die Punkte K und L auf den Seiten AB bzw. BC so eingezeichnet, dass AK = KL = LB und KB = AC gilt. Wie groß ist der Winkel ∠ ABC?

(A) 30° (B) 35° (C) 36° (D) 40° (E) 44°

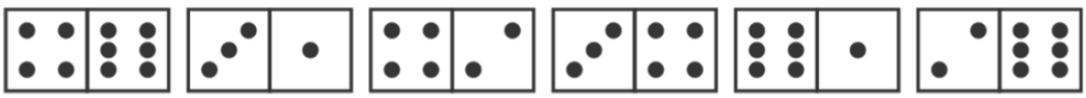


Lösung:
Wegen AK = KL ist das Dreieck ALK gleichschenklig mit Basis AL.
Wegen AB = CB und AK = LB gilt außerdem KB = AB – AK = CB – LB = CL.
Da laut Angabe KB = AC gilt, erhalten wir AC = LC, und LAC ist gleichschenkelig mit Basis AL.
Somit ist KC gemeinsame Symmetrieachse der Dreiecke ALK und ALC, also ist KACL ein Deltoid mit Symmetrieachse KC. Folglich gilt ∠CAK = ∠KLC.
Weil nach Angabe das Dreieck ACB gleichschenklig ist (AB = CB), gilt auch ∠CAK = ∠CAB = ∠BCA = ∠LCA, insgesamt also ∠CAK =∠KLC = ∠LCA = α.
Der Winkel ∠KLC ist Außenwinkel des (wegen KL = LB) gleichschenkligen Dreiecks BKL. Somit ist jeder der beiden Innenwinkel an der Basis BK des Dreiecks BKL halb so groß wie der Außenwinkel ∠KLC = α, d.h. $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$.
Unter Berücksichtigung der Winkelsumme im Dreieck ACB erhalten wir schließlich

$$2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 180°, \qquad \frac{5\alpha}{2} = 180°, \qquad \alpha = 72°.$$

Damit gilt $\angle ABC = \frac{\alpha}{2} = 36°$. **Lösung C**

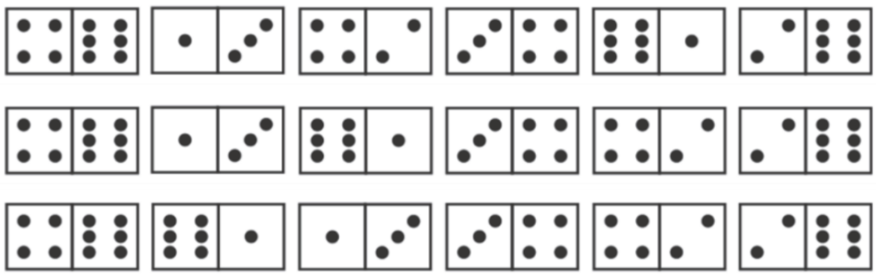
30. Beim Domino müssen die Spielsteine immer so gelegt werden, dass die aneinander liegenden Hälften von zwei benachbarten Dominosteinen die gleiche Augenzahl zeigen. Paul hat sechs Dominosteine vor sich liegen (siehe Abbildung).



Paul will in mehreren Schritten eine korrekte Anordnung herstellen. In jedem Schritt darf er entweder zwei beliebige Dominosteine miteinander vertauschen oder einen Dominostein um 180° drehen. Wie viele Schritte benötigt er mindestens, um die Dominosteine richtig anzuordnen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Das ist unmöglich.

Lösung: Auf den sechs verwendeten Dominosteinen kommen 1 Auge, 2 Augen und 3 Augen jeweils zweimal, 4 Augen und 6 Augen jeweils dreimal vor. Weil innerhalb einer richtig geordneten Reihe jeweils die aneinander liegenden Hälften von zwei benachbarten Dominosteinen die gleiche Augenzahl zeigen, liegen an den Enden der Reihe 4 Augen beziehungsweise 6 Augen. Daher ist es naheliegend, den ersten und den letzten Stein nicht zu bewegen.
In den verbleibenden 10 Dominosteinhälften liegen 2 Augen, 4 Augen und 6 Augen je einmal in der linken und der rechten Hälfte des Stein, während 1 Auge zweimal rechts, 3 Augen zweimal links liegen. Daher muss (wenigstens) der zweite Stein (mit 1 Auge und 3 Augen) um 180° gedreht werden.
Eine weitere Vertauschung liefert noch keine richtige Anordnung. Vertauscht man aber zunächst den dritten mit dem fünften Stein (von links), dann stimmt die Anordnung in der rechten Hälfte der Reihe.
Vertauscht man in einem weiteren Schritt noch den (schon gedrehten) zweiten Stein mit dem jetzt an dritter, anfangs an fünfter Stelle liegenden Stein (mit 6 Augen bzw. 1 Auge), so sind die Steine richtig angeordnet.
Insgesamt benötigt man also mindestens drei Schritte.



Lösung C