Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Junior (9./10. Schulstufe)
Österreich – 15.3.2018

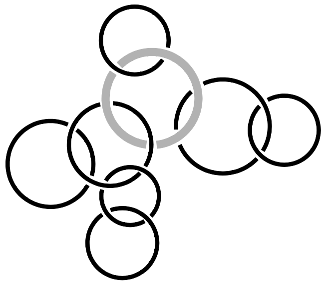
- 3 Punkte Beispiele -

1. In meiner Familie hat jedes Kind mindestens zwei Brüder und mindestens eine Schwester. Wie viele Kinder gibt es mindestens in meiner Familie?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Da jedes Kind mindestens zwei Brüder hat, hat auch jeder Sohn mindestens zwei Brüder. Es gibt somit mindestens drei Söhne. Ebenso hat jede Tochter mindestens eine Schwester und es gibt daher mindestens zwei Töchter. Insgesamt gibt es in der Familie mindestens 5 Kinder.

2. Die abgebildeten Ringe sind teilweise miteinander verkettet. Wie lang ist die längste so gebildete Kette, der auch der dicke helle Ring angehört?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

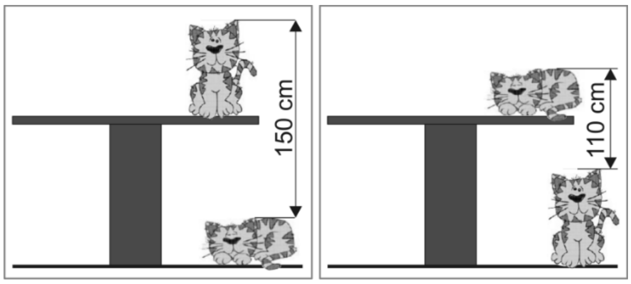
Lösung: Der linke Ring ist in keiner Kette. Die beiden rechten Ringe bilden gemeinsam eine kurze Kette. Die restlichen fünf Ringe bilden ebenfalls gemeinsam eine Kette.

3. In einem Dreieck hat eine Seite die Länge 5 und eine zweite Seite die Länge 2. Die Länge der dritten Seite ist eine ungerade ganze Zahl. Bestimme die Länge der dritten Seite.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Die Längen 4 und 6 sind gerade Zahlen und scheiden daher aus. Die Längen 3 und 7 scheiden aus, da in einem Dreieck die Summe von je zwei Seitenlängen größer sein muss als die Länge der dritten Seite ($2 + 3 \ngtr 5$ und $2 + 5 \ngtr 7$). Die Länge der dritten Seite ist daher 5.

4. Der Abstand vom oberen Rand der auf dem Tisch sitzenden Katze zum oberen Rand der am Boden schlafenden Katze beträgt 150 cm. Der Abstand vom oberen Rand der auf dem Tisch schlafenden Katze zum oberen Rand der am Boden sitzenden Katze beträgt 110 cm. Wie hoch ist der Tisch?



(A) 110 cm (B) 120 cm (C) 130 cm (D) 140 cm (E) 150 cm

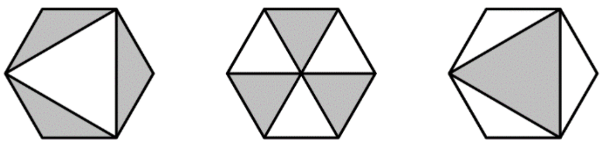
Lösung: Wir bezeichnen mit x die Höhe des Tisches, mit y die Höhe der sitzenden Katze und mit z die Höhe der schlafenden Katze. Dann gilt $x + y - z = 150$ und $x - y + z = 110$. Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich $2x = 260$ und daher $x = 130$. Der Tisch ist somit 130 cm hoch.

5. Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen beträgt 10^{2018}. Wie lautet die mittlere dieser Zahlen?

(A) 10^{2013} (B) 5^{2017} (C) 10^{2017} (D) 2^{2018} (E) $2 \cdot 10^{2017}$

Lösung: Die Summe aus 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist genau 5 Mal so groß wie die mittlere dieser Zahlen. Die mittlere Zahl ist in diesem Fall daher $\frac{10^{2018}}{5} = \frac{10}{5} \cdot 10^{2017} = 2 \cdot 10^{2017}$.

6. In den drei abgebildeten kongruenten regelmäßigen Sechsecken bezeichnen wir mit X, Y und Z der Reihe nach die Flächen der grau gefärbten Bereiche. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?



(A) $X = Y = Z$ (B) $Y = Z \neq X$ (C) $Z = X \neq Y$ (D) $X = Y \neq Z$ (E) Jede der Flächen hat einen anderen Wert.

Lösung: Wenn wir im ersten Sechseck in das weiße Dreieck die Verbindungen der Eckpunkte zum Mittelpunkt einzeichnen, so werden drei grau-weiße Rauten mit eingezeichneten Diagonalen sichtbar. Die Diagonalen teilen die

Rauten jeweils in zwei gleich große Flächen (eine graue und eine weiße). Da also in jeder Raute die weiße Fläche gleich groß ist wie die graue, ist auch im Sechseck X genau die Hälfte der gesamten Fläche. Gleiches gilt Z im dritten Sechseck. Auch im zweiten Sechseck ist die graue Fläche genau so groß wie die weiße.

Es gilt also $X = Y = Z$.

7. Maria möchte 42 Äpfel, 60 Pfirsiche und 90 Kirschen unter ihren Freunden gerecht aufteilen. Dazu teilt sie das gesamte Obst auf Körbe auf, mit jeweils der gleichen Zusammenstellung an Äpfeln, Pfirsichen und Kirschen, um jedem Freund einen solchen Obstkorb zu geben. Wie viele Obstkörbe kann sie auf diese Weise höchstens befüllen?

(A) 3 (B) 6 (C) 10 (D) 14 (E) 42

Lösung: Maria kann ihr Obst nur auf solche Anzahlen an Obstkörben gerecht aufteilen, die ein Teiler von jeweils 42, 60 und 90 (also ein gemeinsamer Teiler) sind. Die höchste solche Anzahl ist also der größte gemeinsame Teiler (ggT). Der ggT von 42, 60 und 90 ist 6. Maria kann also 6 Obstkörbe befüllen.

8. In der abgebildeten (richtigen) Rechnung wurden einige Ziffern durch die Buchstaben P, Q, R und S ersetzt. Wie groß ist der Wert von P + Q + R + S?

$$\begin{array}{r} P\;4\;5 \\ +\,Q\;R\;S \\ \hline 6\;5\;4 \end{array}$$

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 24

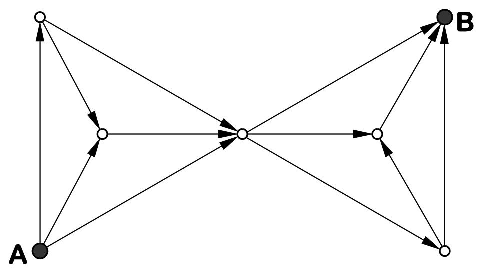
Lösung: Wir betrachten zuerst die Einerstelle. Da $5 + S \geq 5 > 4$, ist $5 + S = 14$ und daher $S = 9$. In der Zehnerstelle haben wir einen Übertrag von 1. Die Rechnung an der Zehnerstelle lautet also $4 + R + 1 = 5$ und daher $R = 0$. An der Hunderterstelle haben wir keinen Übertrag und es gilt daher $P + Q = 6$. Insgesamt ergibt sich $P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$.

9. Wie groß ist die Summe von 25 % von 2018 und 2018 % von 25?

(A) 1009 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3027 (E) 5045

Lösung: Die Summe ist $\frac{25}{100} \cdot 2018 + \frac{2018}{100} \cdot 25 = \frac{25 \cdot 2018}{100} + \frac{2018 \cdot 25}{100} = 2 \cdot \frac{25 \cdot 2018}{100} = \frac{2018}{2} = 1009$.

10. In der Figur soll man in Richtung der Pfeile von A nach B gehen. Wie viele verschiedene Wege gibt es, die diese Bedingung erfüllen?



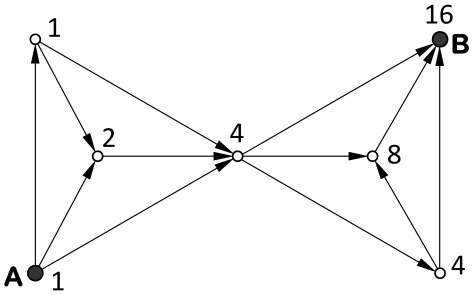
(A) 20 (B) 16 (C) 12 (D) 9 (E) 6

Lösung: Einen Punkt, von dem ein Pfeil zu einem Punkt P zeigt, bezeichnen wir als Vorgänger von P.

Für die Wege von A zu einem Punkt P gilt: Die Anzahl der Wege von A nach P ist genau so groß wie die Summe der Anzahlen der Wege von A zu allen Vorgängern von P.

Wir beschriften die Punkte in der Figur von A ausgehend jeweils mit der Anzahl an Wegen, die von A zu diesem Punkt führen.

Wir starten in A und beschriften mit 1. Wir können nun der Reihe nach jene Punkte beschriften, wo alle Vorgänger bereits beschriftet sind.



Von A nach B führen also 16 Wege.

- 4 Punkte Beispiele -

11. Die Eingänge zweier Studentenheime befinden sich auf einer geraden Straße in Abstand von 250 m zueinander. Im ersten wohnen 100 Studenten und im zweiten 150 Studenten. Wo sollte man eine Bushaltestelle einrichten, wenn die Gesamtsumme der Wege aller Studenten beider Heime zur Haltestelle so gering wie möglich sein soll?

(A) direkt vor dem ersten Heim (B) 100 m vom ersten Heim (C) 100 m vom zweiten Heim

(D) direkt vor dem zweiten Heim (E) an einer beliebigen Stelle zwischen den beiden Heimen

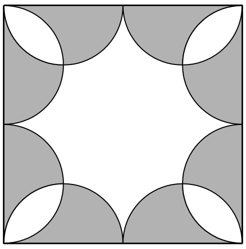
Lösung: Wenn die Haltestelle x Meter vom ersten Heim entfernt ist (mit $0 \leq x \leq 250$), so ist die Gesamtsumme der Wege $100x + 150(250 - x)$. Der Faktor der mit 150 multipliziert wird soll also möglichst gering sein. Für $x = 250$ ist der Faktor 0 und damit die Gesamtsumme am geringsten. Das entspricht einer Haltestelle direkt vor dem zweiten Heim.

12. In einer Reihe werden 105 Zahlen geschrieben: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... Dabei wird jede Zahl n genau n Mal geschrieben. Wie viele dieser Zahlen sind durch 3 teilbar?

(A) 4 (B) 12 (C) 21 (D) 30 (E) 45

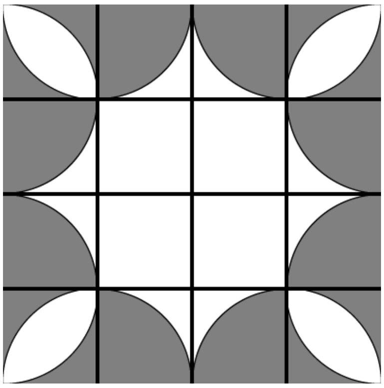
Lösung: Wir bezeichnen mit N die höchste der Zahlen. Da jede Zahl n genau n Mal steht, gilt $105 = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$ und damit $N = 14$. Davon sind die Zahlen 3, 6, 9 und 12 durch 3 teilbar. Diese stehen 3, 6, 9 bzw. 12 Mal in der Reihe. Insgesamt sind in der Reihe also $3 + 6 + 9 + 12 = 30$ Zahlen durch 3 teilbar.

13. Im Inneren eines Quadrats mit der Seitenlänge 4 werden acht kongruente Halbkreise gezeichnet. Wie groß ist die Fläche des weißen Bereichs?



(A) 2π (B) 8 (C) $6 + \pi$ (D) $3\pi - 2$ (E) 3π

Lösung: Wir teilen das Quadrat in kleine Quadrate mit Seitenlänge 1. In der Mitte sind dann 4 weiße Quadrate. In den Quadraten in den Ecken sind jeweils zwei graue Flächen. Diese acht grauen Flächen sind jeweils das Komplement auf einen Viertelkreis (in diesen Quadraten). In den restlichen acht Quadraten sind graue Viertelkreise, die weißen Flächen dort bilden wieder das Komplement. Diese acht weißen Komplemente tauschen wir mit den grauen Komplementen und haben dadurch acht graue und vier (weitere) weiße Quadrate. Der weiße Bereich ist insgesamt also genau die Hälfte von $4 \cdot 4$, also 8.



14. An einem bestimmten Tag fahren insgesamt 40 Züge von einer der Städte M, N, O, P und Q zu genau einer anderen dieser Städte. Entweder von oder nach M fahren 10 Züge. Entweder von oder nach N fahren 10 Züge. Entweder von oder nach O fahren 10 Züge. Entweder von oder nach P fahren 10 Züge. Wie viele Züge fahren entweder von oder nach Q?

(A) 0 (B) 10 (C) 20 (D) 30 (E) 40

Lösung: Da an diesem Tag 40 Züge von einer der Städte in eine andere fahren, fahren diese 40 Züge von einer Stadt weg und die 40 Züge fahren zu einer Stadt. Insgesamt gibt es also 80 Ankünfte plus Abfahrten. In M, N, O und P gibt es davon je 10, insgesamt in diesen Städten 40. Für Q bleiben damit die restlichen 40 Ankünfte plus Abfahrten.

15. An der Humanistischen Universität kann man Sprachen, Geschichte und Philosophie studieren. Einige Studenten studieren dort genau eine Sprache. (Niemand studiert mehrere Sprachen zugleich.) Unter diesen, studieren 35% Englisch. Unter allen Studenten der Universität studieren 13% eine andere Sprache als Englisch. Welcher Prozentsatz der Studenten studiert eine Sprache?

(A) 13 % (B) 20 % (C) 22 % (D) 48 % (E) 65 %

Lösung: Die 13 %, die eine andere Sprache als Englisch studieren, sind 65 % aller Sprachstudenten. Insgesamt studieren also $\frac{13}{65} = 0{,}2 = 20\ \%$ eine Sprache.

16. Peter will ein Buch kaufen, hat aber kein Geld. Er kann das Buch nur mit Hilfe seines Vaters und seiner beiden Brüder kaufen. Sein Vater gibt ihm halb so viel Geld wie seine Brüder. Sein älterer Bruder gibt ihm ein Drittel jener Summe, die ihm die anderen beiden geben. Der jüngste Bruder gibt ihm 10 €. Wie teuer ist das Buch?

(A) 24 € (B) 26 € (C) 28 € (D) 30 € (E) 32 €

Lösung: Die beiden Brüder geben doppelt so viel wie der Vater, der Vater gibt also ein Drittel der Gesamtsumme. Der jüngere Bruder und der Vater geben dreimal so viel wie der ältere Bruder. Der ältere Bruder gibt also ein Viertel der Gesamtsumme. Daher bleiben für den jüngeren Bruder noch $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ der Gesamtsumme. Das Buch kostet also $\frac{12}{5} \cdot 10\text{ €} = 24\text{ €}$.

17. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es mit der Eigenschaft, dass die zweiziffrige Zahl, die man durch das Streichen der mittleren Ziffer erhält, genau ein Neuntel der ursprünglichen Zahl ist?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Für drei Ziffern a, b und c ist $100a + 10b + c$ eine dreiziffrige Zahl (falls $a \neq 0$). Wir suchen nun die Ziffern so, dass gilt $100a + 10b + c = 9 \cdot (10a + c)$, also $10a + 10b = 8c$ bzw. $a + b = \frac{4c}{5}$. Da $a + b$ ganzzahlig ist, muss auch $\frac{4c}{5}$ ganzzahlig sein und somit c durch 5 teilbar sein. Falls $c = 0$ muss auch $a + b = 0$ und daher $a = b = c = 0$ sein. Das ergibt keine dreiziffrige Zahl. Also ist $c = 5$ und $a + b = 4$.

Die dreiziffrigen Zahlen sind 405, 315, 225 und 135. Dabei ist $\frac{405}{9} = 45$, $\frac{315}{9} = 35$, $\frac{225}{9} = 25$ und $\frac{135}{9} = 15$.

18. Wie oft erscheint der Summand 2018^2 unter der Wurzel, wenn folgende Aussage richtig ist?

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + \ldots + 2018^2} = 2018^{10}$$

(A) 5 (B) 8 (C) 18 (D) 2018^8 (E) 2018^{18}

Lösung: Es gilt $2018^{10} = \sqrt{2018^{20}} = \sqrt{2018^{18} \cdot 2018^2}$.

19. Wie viele Ziffern hat das Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$?

(A) 2017 (B) 2018 (C) 4035 (D) 4036 (E) 4037

Lösung: Der Faktor $(10^{2018} - 1)$ hat 2018 Stellen (also 2018 Mal die Ziffer 9). Dividiert durch 9 hat die Zahl immer noch 2018 Stellen (2018 Mal die Ziffer 1). Der Faktor 10^{2018} hängt daran noch 2018 Nullen. Das ergibt insgesamt 4036 Stellen.

20. In einem regelmäßigen 2018-eck sind die Eckpunkte mit 1 bis 2018 durchnummeriert. Es werden zwei Diagonalen des Vielecks gezeichnet, wovon eine die Eckpunkte 18 und 1018 verbindet und die andere die Eckpunkte 1018 und 2000. Wie viele Eckpunkte haben die drei resultierenden Vielecke?

(A) 38, 983, 1001 (B) 37, 983, 1001 (C) 38, 982, 1001 (D) 37, 982, 1000 (E) 37, 983, 1002

Lösung: Ein Vieleck hat die Ecken 18, 19, …, 1018. Ein weiteres die Eckpunkte 1, 2, 3, …, 18, 1018, 2000, 2001, 2002, … 2018 und das letzte die Eckpunkte 1018, 1019, 1020, …, 2000. Das sind 1001, 18+1+19=38 und 983 Ecken.

21. Auf einer Tafel werden einige ganze Zahlen geschrieben, darunter die Zahl 2018. Die Summe all dieser Zahlen ist 2018. Das Produkt dieser Zahlen ist ebenfalls 2018. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Zahlen auf der Tafel sein?

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

Lösung: Da das Produkt 2018 ist, sind alle anderen Zahlen entweder -1 oder 1 und auf der Tafel gibt es eine gerade Anzahl an -1. Da die Summe 2018 ist, gibt es auf der Tafel gleich viele -1 wie 1. Da die Anzahl an -1 schon durch zwei teilbar ist, ist die Anzahl an -1 und 1 durch vier teilbar. Zusätzlich gibt es auf der Tafel noch die Zahl 2018.Die Anzahl aller Zahlen auf der Tafel muss bei Division durch vier also Rest 1 liefern. Das ist von den möglichen Antworten nur bei 2017 der Fall.

22. Gegeben sind vier positive Zahlen. Man soll nun darunter drei auswählen, ihr arithmetisches Mittel bestimmen, und die vierte Zahl dazu zählen. Dies kann man auf vier Arten machen. Die erhaltenen Ergebnisse sind dann 17, 21, 23 und 29. Wie lautet die größte der vier gegebenen Zahlen?

(A) 12 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 29

Lösung: Wir bezeichnen die vier Zahlen mit a, b, c und d mit $a \geq b \geq c \geq d$. Die Rechnungen sind dann:

$$\frac{a+b+c}{3}+d=17$$
$$\frac{a+b+d}{3}+c=21$$
$$\frac{a+c+d}{3}+b=23$$
$$\frac{b+c+d}{3}+a=29$$

Wir summieren die ersten drei Gleichungen und multiplizieren die vierte mit 5:

$$a+\frac{5}{3}(b+c+d)=17+21+23$$
$$5a+\frac{5}{3}(b+c+d)=145$$

Nun subtrahieren wir die obere Gleichung von der unteren:

$$4a=84$$
$$a=21$$

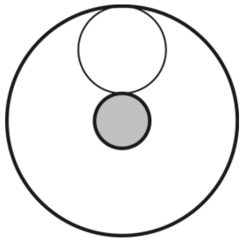
23. Die Punkte $A_0, A_1, A_2, \dots$ liegen auf einer Geraden. Es gilt $\overline{A_0\,A_1}=1$, und A_n ist jeweils der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$, für jeden nicht-negativen Index n. Wie lang ist die Strecke $\overline{A_0A_{11}}$?

(A) 171 (B) 341 (C) 512 (D) 587 (E) 683

Lösung: Die Punkte mit ungeradem Index liegen auf einer Seite von A_0, die Punkte mit geradem Index auf der anderen Seite.

Es gilt $\overline{A_nA_{n+1}}=2^n$ und daher $\overline{A_nA_{n+2}}=\overline{A_{n+1}A_{n+2}}-\overline{A_nA_{n+1}}=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$. Für $\overline{A_0A_{11}}$ gilt $\overline{A_0A_{11}}=\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_3}+\overline{A_3A_5}+\overline{A_5A_7}+\overline{A_7A_9}+\overline{A_9A_{11}}=1+2^1+2^3+2^5+2^7+2^9=1+2+8+32+128+512=683$.

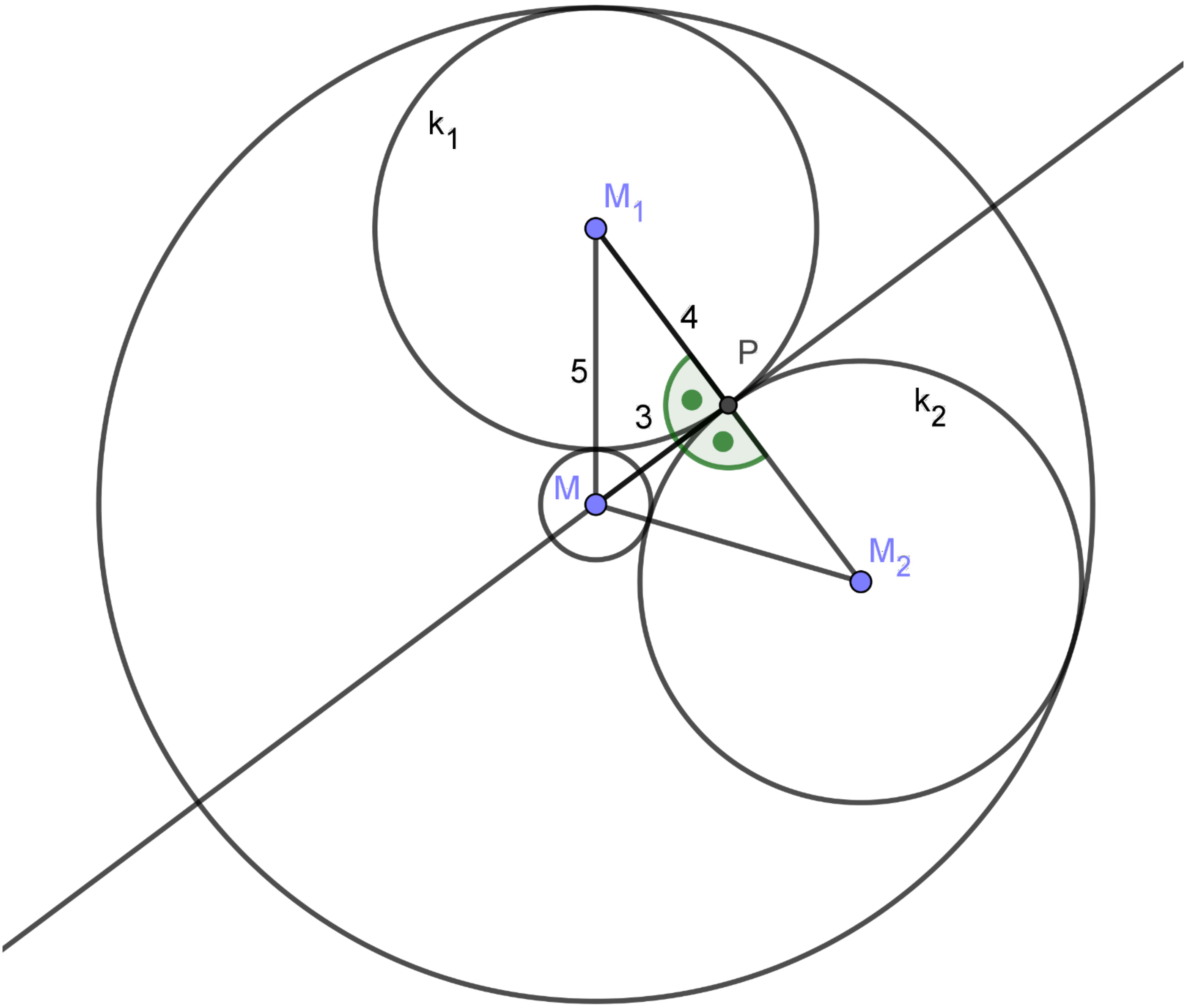
24. Zwei konzentrische Kreise mit den Radien 1 und 9 bilden einen Kreisring. Im Inneren dieses Rings werden n Kreise ohne Überlappung gezeichnet, wobei jeder von ihnen beide Kreise des Kreisrings berührt. (In der Abbildung sieht man ein Beispiel für n=1 und anderen Radien als gegeben.) Was ist der größtmögliche Wert von n?



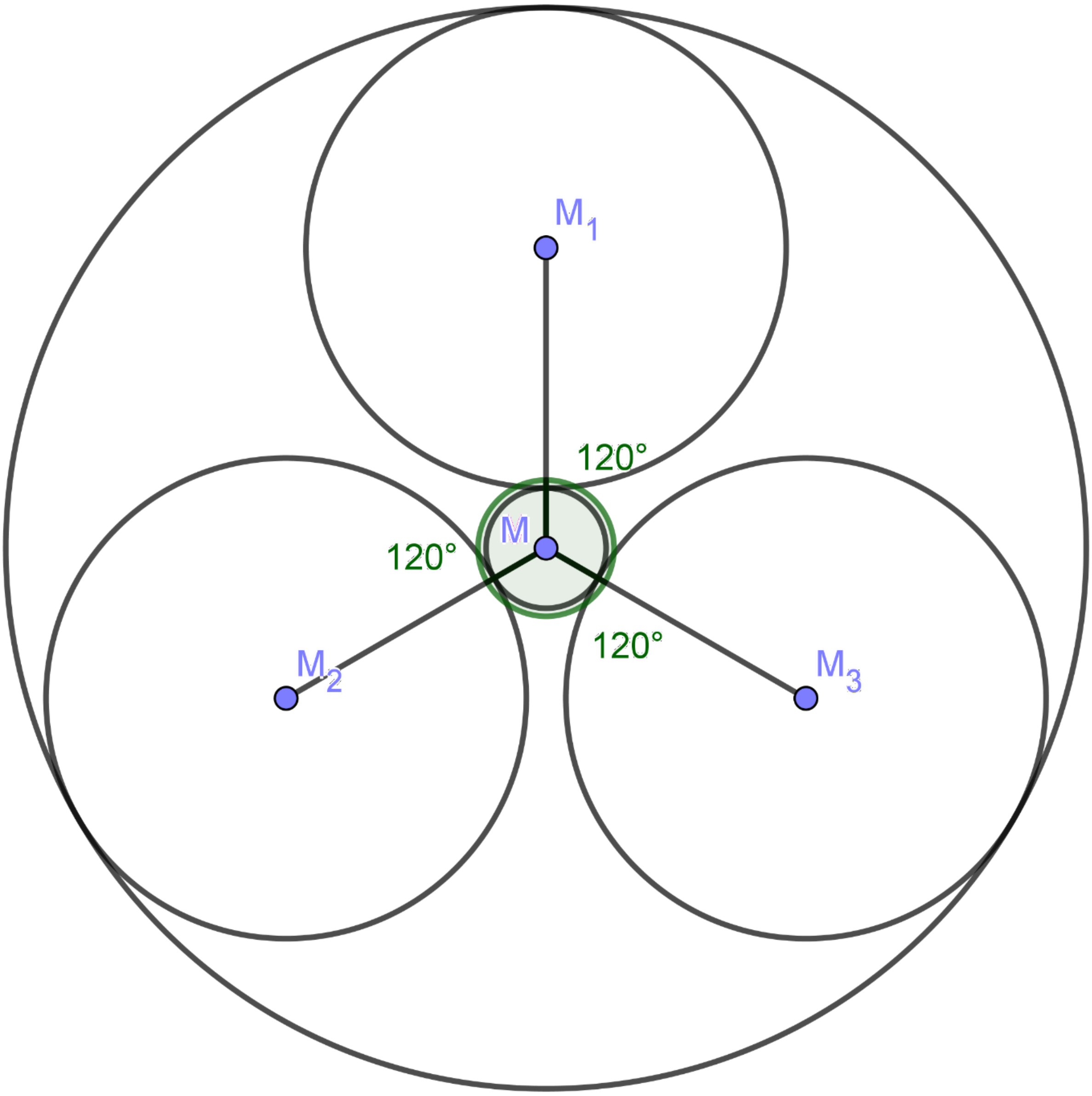
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Sei M der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Wir zeigen zuerst, dass sich nicht mehr als 3 Kreise ohne Überlappung ausgehen und danach eine Lösung mit 3 Kreisen.

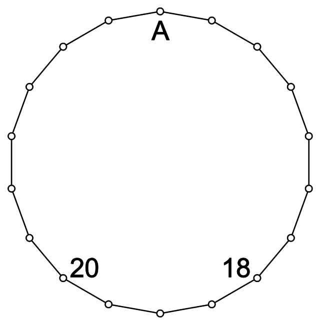
Wir zeichnen nach den Vorgaben einen Kreis k_1 mit Mittelpunkt M_1 und zeichnen einen weiteren Kreis k_2 mit Mittelpunkt M_2 so, dass er zusätzlich zu den beiden gegebenen Kreisen auch noch den Kreis k_1 berührt, den Berührpunkt nennen wir P. Da MP Tangente an k_1 und k_2 ist, gilt $M_1P \perp MP \perp M_2P$. Die Punkte M, M_1 und P bilden somit ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen 5, 4 und 3. Der Winkel $\angle M_1MP$ ist größer als $\frac{180°-90°}{2} = 45°$, da er der zweitgrößte Winkel im Dreieck MM_1P ist. Gleiches gilt für $\angle M_2MP$. Der Winkel M_1MM_2 ist größer als $90°$. Daher können weniger als $\frac{360}{90} = 4$ solche Kreise gezeichnet werden, ohne dass diese sich überlappen.



Zeichnen wir drei Kreise mit Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 so, dass jeweils $\angle M_i M M_j = 120°$ für $i \neq j$, so überlappen diese nicht (siehe Bild).

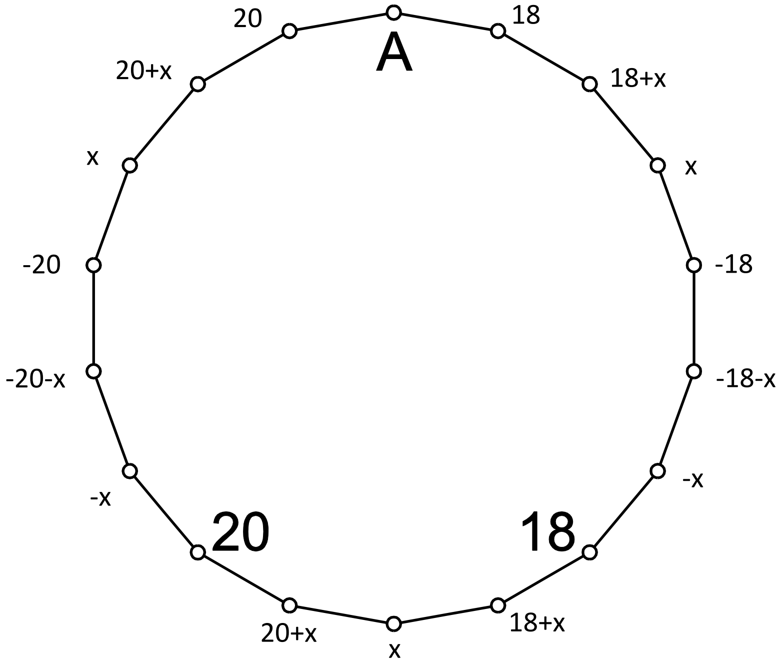


25. In jedem Eckpunkt des abgebildeten 18-ecks soll eine Zahl geschrieben werden, die gleich der Summe der beiden Zahlen in den benachbarten Eckpunkten ist. Zwei dieser Zahlen sind vorgegeben. Welche Zahl steht beim Eckpunkt A?



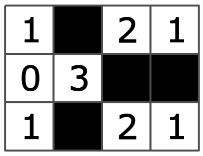
(A) 2018 (B) –20 (C) 18 (D) 38 (E) –38

Lösung: Die Zahl im untersten Eckpunkt bezeichnen wir mit x. Dann können wir davon ausgehend die Zahlen in den restlichen Punkten berechnen (siehe Grafik).



Für die Zahl beim Eckpunkt A ergibt sich also 38.

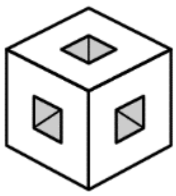
26. Diana zeichnet auf einem karierten Blatt ein Rechteck aus zwölf Quadraten. Einige der Quadrate sind schwarz gefärbt. In jedes weiße Quadrat schreibt sie die Anzahl der benachbarten schwarzen Felder. Die Abbildung zeigt ein Beispiel für ein solches Rechteck. Nun macht sie dasselbe mit einem Rechteck, das aus 2018 Quadraten besteht. Was ist die höchste Zahl, die sie als Summe aller Zahlen in den weißen Quadraten erhalten kann?

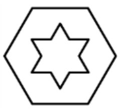
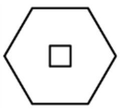


(A) 1262 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3025 (E) 3027

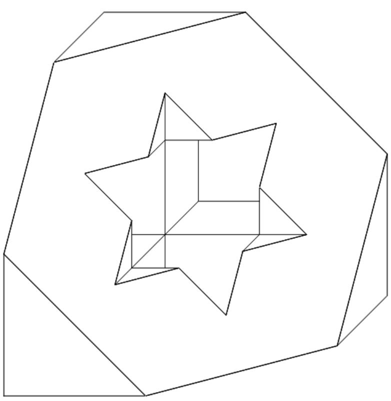
Lösung: Ein Rechteck mit 2018 Quadraten hat das Format 2×1009. Die größte Summe hat Diana, wenn die Quadrate abwechselnd (schachbrettartig) schwarz und weiß gefärbt sind. Sie hat dann in einer Reihe an den Enden je ein weißes Feld mit der Zahl 2. In der anderen Reihe sind die Enden schwarz. Alle weiteren weißen Felder sind mit 3 beschriftet. Insgesamt hat sie 1009 weiße Felder und hat als Summe $3 \cdot 1009 - 2 = 3025$.

27. Aus einem 3 x 3 x 3 Würfel sind sieben kleine Würfel entfernt worden, wie im Bild zu sehen ist. Diese verbleibende (rundum symmetrische) Figur wird mit einer Ebene durch den Mittelpunkt und normal zu einer der vier Raumdiagonalen geschnitten. Wie sieht der Querschnitt aus?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung:



28. Jede Zahl der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6} wird in genau ein Feld einer 2 x 3 Tabelle geschrieben. Auf wie viele Arten kann man dies machen, sodass die Summe der Zahlen in jeder Spalte und jeder Zeile durch 3 teilbar ist?

(A) 36 (B) 42 (C) 45 (D) 48 (E) eine andere Zahl

Lösung: Für die Spalten gibt es folgende Möglichkeiten:

$$\binom{1}{5}, \binom{2}{4}, \binom{3}{6}, \binom{4}{2}, \binom{5}{1}, \binom{6}{3}$$

Für die erste Spalte kann ich beliebig eine der sechs Spalten wählen, für die zweite gibt es nur mehr vier Möglichkeiten (nach der Spalte $\binom{1}{5}$ sind z.B. die Spalten $\binom{1}{5}$ und $\binom{5}{1}$ nicht mehr möglich). Für die letzte Spalte sind nur mehr zwei Spalten möglich. Insgesamt ergeben sich damit $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten.

29. Ed macht aus mehreren identischen kleinen weißen Würfeln einen großen Würfel und malt manche Seitenflächen des großen Würfels rot an. Seine Schwester Nicole lässt den Würfel fallen und er zerbricht wieder in die ursprünglichen kleinen Würfel. Davon haben 45 keine rote Seitenfläche. Wie viele Seitenflächen des großen Würfels hat Ed rot bemalt?

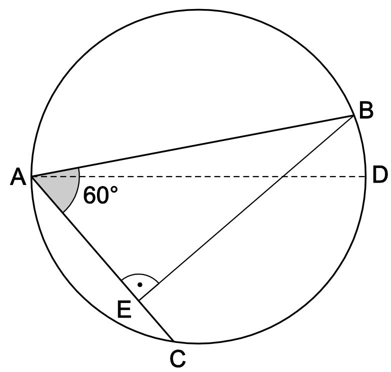
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Zumindest die Würfel im Inneren haben keine rote Seitenfläche. Bei einem $n \times n \times n$-Würfel, sind das $(n-2)^3$ kleine Würfel. Da nur 45 Würfel keine rote Seitenfläche haben, gilt $(n-2)^3 \leq 45$ und damit $n \leq 5$. Der Würfel besteht aus mindestens 45 Würfeln. Daraus folgt $n^3 \geq 45$ und damit $n \geq 4$.

Möglichkeit 1: n=4. Der Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln. Davon haben 64-45=19 Würfel eine rote Seite. Durch das Bemalen einer einzelnen Seitenfläche des großen Würfels haben 16 kleine Würfel eine rote Seitenfläche, beim Bemalen von zwei zusammenstoßenden großen Seitenflächen 16+12=28. Beim Bemalen von zwei gegenüberliegenden Seitenflächen 16+16=32. Es ist in diesem Fall nicht möglich, genau 19 Würfel mit einer roten Seitenfläche zu erhalten.

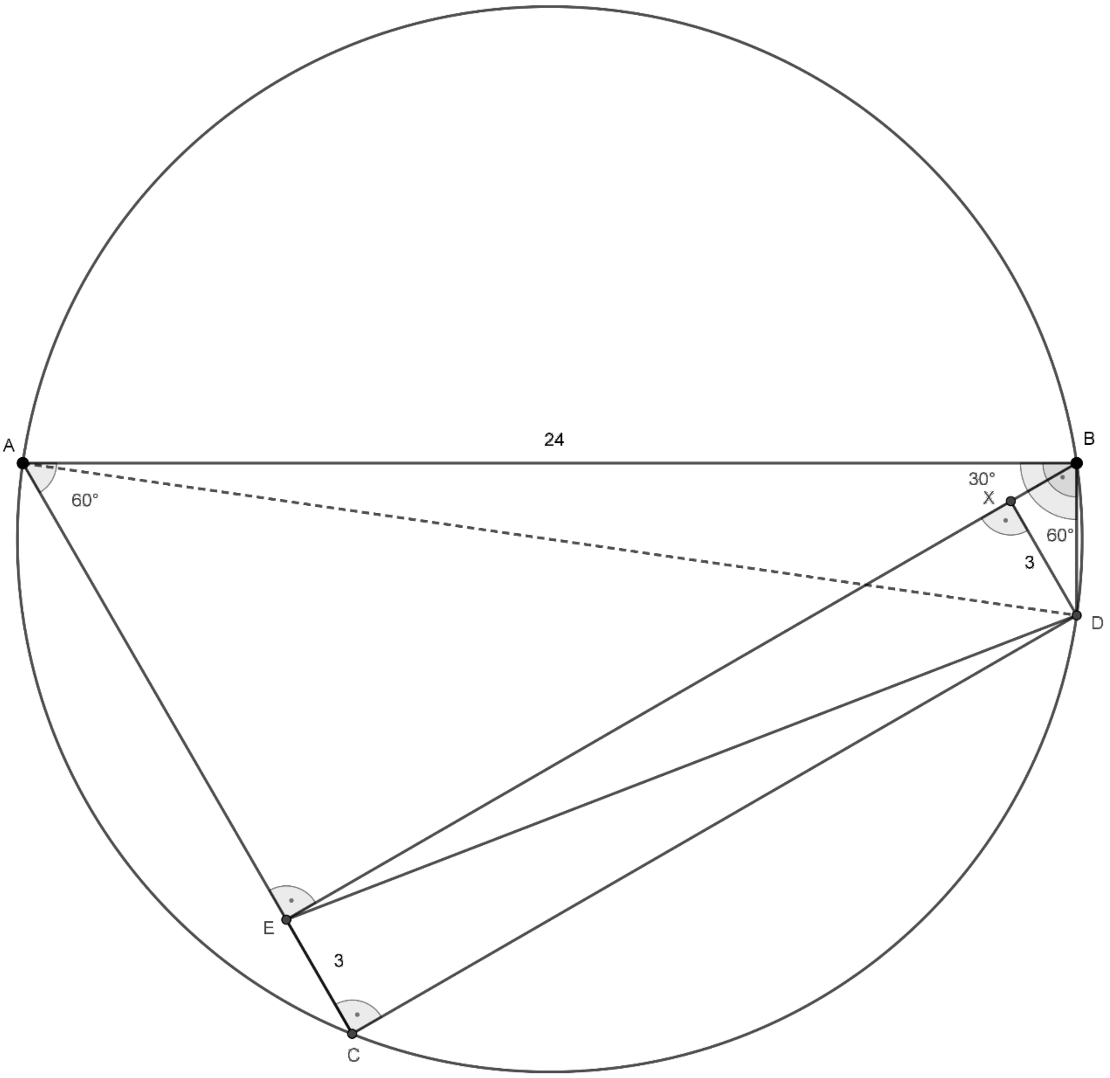
Möglichkeit 2: $n = 5$. Im Inneren sind 27 kleine Würfel. Weitere 18 Würfel haben keine rote Seitenfläche. Eine Möglichkeit ist, dass Ed nur zwei gegenüberliegende Seiten des großen Würfels nicht rot bemalt hat. Dann haben an diesen Seiten dennoch alle Würfel, die entlang einer Kante sind, mindestens eine rote Seite. Von den 25 Würfeln einer Seite sind das 16. Die restlichen 9 haben keine rote Seite. Insgesamt haben damit 27+9+9=45 Würfel keine rote Seite. Ed hat vier Seitenflächen rot bemalt.

30. Im Kreis mit Durchmesser AD werden zwei Sehnen AB und AC gezeichnet. Es gilt $\angle BAC = 60°$, $AB = 24$ cm, $EC = 3$ cm, und BE ist normal zu AC. Wie lang ist die Sehne BD?



(A) $\sqrt{3}$ cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) $2\sqrt{3}$ cm (E) $3\sqrt{2}$ cm

Lösung: Es gilt $\angle ABE = 180° - 90° - 60° = 30°$ und wegen des Satzes von Thales $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Weiters gilt $\angle EBD = \angle ABD - \angle ABE = 60°$. Sei X der Höhenfußpunkt der Höhe durch D im Dreieck $\triangle EBD$. Da $EXDC$ ein Rechteck ist, gilt $XD = EC = 3\ cm$ und $\triangle BXD$ ist rechtwinklig mit rechtem Winkel in X und $\angle XBD = 60°$. Daher ist $BX = \frac{BD}{2}$ und es gilt $BD^2 = 3^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich $BD = 2 \cdot \sqrt{3}$.



A
24
B
30°
X
60°
60°
3
D
E
3
C