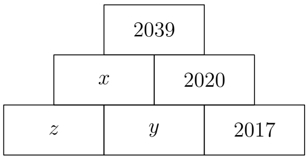
Känguru 2017 – Student – Lösungen und Erklärungen

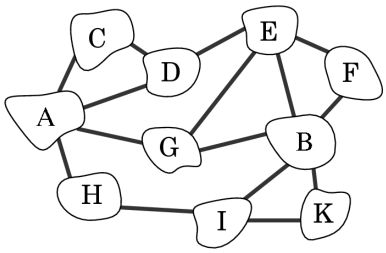
1. Wir bezeichnen die fehlenden Ziegel wie folgt mit x, y und z:



   Es muss gelten $x + 2020 = 2039$, daraus folgt $x = 19$. Dann muss in der Zeile darunter rechts weiters gelten $y + 2017 = 2020$, daraus folgt $y = 3$. Und schließlich gilt links unten $z + y = x$, also $z + 3 = 19$, daraus folgt $\mathbf{z = 16}$.

2. Der Maßstab $1 : 87$ bedeutet: 1cm im Modell entspricht 87cm in Wirklichkeit. Also entsprechen 2cm im Modell $2 \cdot 87\text{cm} = 174\text{cm} =$ **1,74m** in Wirklichkeit.

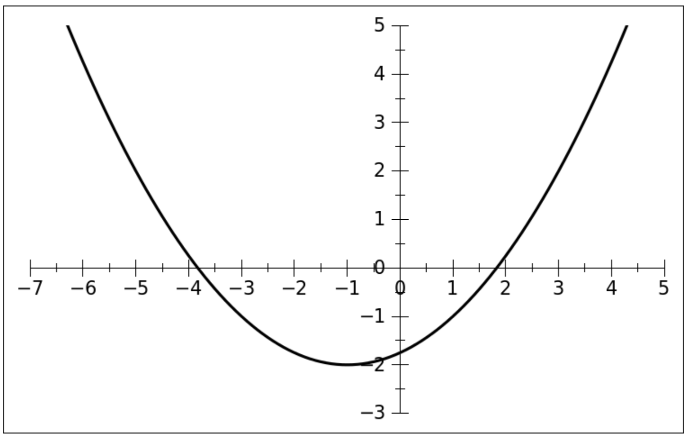
3. Wir beschriften die Inseln wie rechts abgebildet.
   Wenn man die Brücke D–E, die Brücke A–G und die Brücke A–H löscht, zerfällt die Inselgruppe in einen linken Teil bestehend aus A, C und D, und einen rechten Teil bestehend aus den restlichen Inseln. Zwischen diesen Teilen ist nun keine Verbindung mehr möglich, insbesondere also auch nicht von A nach B.
   Nun bleibt aber noch zu zeigen, dass tatsächlich 3 Brücken gesperrt werden müssen und es nicht auch schon mit 1 oder 2 Brücken möglich ist. Dazu überlegen wir uns, dass jeder vorher mögliche Weg unterbrochen werden muss – beispielsweise also auch der Weg A–D–E–B, der Weg A–G–B und der Weg A–H–I–B. Diese drei Wege haben aber keine einzige Brücke gemeinsam, also müssen bereits um diese drei Wege zu unterbrechen **mindestens 3 Brücken** gesperrt werden.



4. Wir schreiben das einfach als eine Gleichung an: $0.75 \cdot a = 0.4 \cdot b$. Multiplizieren wir beide Seiten mit 20, so erhalten wir $\mathbf{15a = 8b}$.

5. Eine quadratische Funktion ist eine Parabel. Wir vermuten einmal, dass Ausschnitt D zur Funktion dazugehört. In Ausschnitt D sehen wir, dass die Parabel ihren tiefsten Punkt etwa bei $x = -1$ hat. Nun überprüfen wir, welche der anderen Ausschnitte dazupassen. In Ausschnitt A sehen wir ein Stück, das rechts von $x = -1$ liegt und steigt, das passt. In Ausschnitt B sehen wir ein Parabelstück, das sich mit dem aus Ausschnitt D sogar teilweise überdeckt und an derselben Stelle die y-Achse schneidet, auch das passt. In Ausschnitt E sehen wir ein Stück, das links von $x = -1$ liegt und fallend ist, auch das passt.

   Insgesamt sieht die Kurve, die diese vier Ausschnitte enthält, etwa so aus:



   Aber in Ausschnitt C sehen wir ein Stück, das rechts von $x = -1$ liegt und fallend ist, und das passt nicht zu den schon betrachteten vier Ausschnitten. Also ist **Ausschnitt C** der nicht dazupassende Ausschnitt.

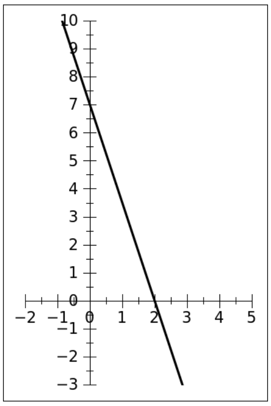
6. Als Radien des Kreises sind OA, OB, OC und OX alle gleich lang, laut Angabe hat auch BC dieselbe Länge, und wegen der Symmetrie auch AX. Wir sehen also zwei gleichseitige Dreiecke OBC und OAX, von denen wir daher wissen, dass ihre Winkel jeweils $60°$ betragen.

   Nun bleibt nur noch zu klären, welchen Anteil der Fläche diese beiden schraffierten "Tortenstücke" (mit Innenwinkeln von jeweils $60°$) ausmachen. Weil $\sphericalangle COA = 180° - \sphericalangle BOC = 120°$ gilt, passen in das obere und untere weiße Stück jeweils noch zwei identische Tortenstücke. Daher ist **$\frac{1}{3}$ der Fläche** schraffiert.

   Wenn man die Formel für die Berechnung der Fläche eines Kreissektors gerade zur Hand hat, kann man alternativ auch direkt ausrechnen, dass die Fläche eines solchen Tortenstücks $F = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$ beträgt, wobei α der Innenwinkel ist. Ein Stück mit $\alpha = 60°$ hat also eine Fläche von $F = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{60°}{360°} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6}$. Zwei solche Stücke haben die doppelte Fläche, also $r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3}$. Und der gesamte Kreis hat eine Fläche von $r^2 \cdot \pi$. Der schraffierte Anteil beträgt also $\frac{r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{1}{3}$.

7. Egal, wie man diese Steine zusammenbaut, eine Stange aus 4 Würfeln muss immer zwei weiße und zwei graue Würfel enthalten. In Quader A ist das erfüllt. In Quadern B, C und D besteht jeweils die hinten oben liegende 4er-Stange aus vier gleichfarbigen Würfeln, in Quader E die vorne unten liegende 4er-Stange. Also kann **nur Quader A** aus solchen $4 \times 1 \times 1$-Quadern zusammengesetzt werden.

8. Wir sehen sofort aus der Gleichung, dass die lineare Funktion die y-Achse bei 7 schneidet und fallend ist. Die lineare Funktion sieht also etwa so aus wie rechts abgebildet.
   Daher enthält **Quadrant III** keinen Punkt der Funktion.

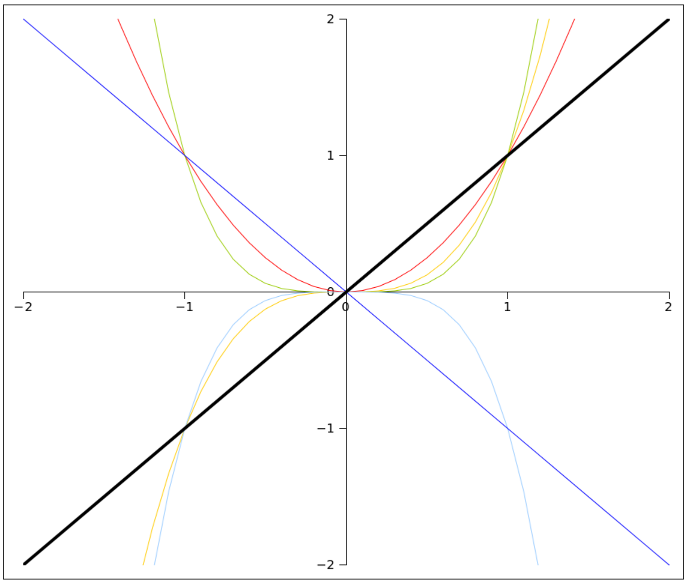


9. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich jeweils als $\frac{\text{"günstige"}}{\text{"mögliche"}}$. Für die fünf Schachteln ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten, einen blauen Ball zu erwischen:
   (A) $\frac{10}{10+8} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \approx 0{,}5555$
   (B) $\frac{6}{6+4} = \frac{6}{10} = 0{,}6$
   (C) $\frac{8}{8+6} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714$
   (D) $\frac{7}{7+7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
   (E) $\frac{12}{12+9} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714$

   Ohne Taschenrechner lassen sich viele dieser Verhältnisse auch gut abschätzen, um sich das explizite Ausrechnen in der kurzen Wettbewerbszeit zu ersparen: Beispielsweise sehen wir sofort, dass (D) $= \frac{7}{14}$ schlechter ist als (C) $= \frac{8}{14}$, da der Nenner gleich aber der Zähler niedriger ist. Auch, dass (C) und (E) gleich sind, sieht man bereits nach dem Kürzen. Für die verbleibenden Vergleiche kann man sich zu Nutze machen, dass $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ für positive ganze Zahlen a, b, c und d genau dann gilt, wenn $ad < bc$ (Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit b und d). Also zum Beispiel $\frac{5}{9} < \frac{4}{7}$ weil $5 \cdot 7 = 35 < 36 = 9 \cdot 4$.

   Die höchste Wahrscheinlichkeit für einen blauen Ball besteht also bei **Schachtel (B)**.

10. Zeichnen wir alle Graphen auf:



Die Graphen von $g_1(x) = x^2$ (rot) sowie von $g_3(x) = x^4$ (grün) schneiden $f(x) = x$ (schwarz) jeweils in 0 und in 1. Der Graph von $g_2(x) = x^3$ (gelb) schneidet $f(x) = x$ in -1, in 0 und in 1. Der Graph von $g_4(x) = -x^4$ (hellblau) schneidet $f(x) = x$ in -1 und in 0. Schließlich schneidet der Graph von $g_5(x) = -x$ (dunkelblau) die Funktion $f(x) = x$ nur in 0.

Daher hat $\mathbf{g_2(x) = x^3}$ die meisten Schnittpunkte mit $f(x)$.

11. Die Seitenlängen setzen sich jeweils zusammen aus zwei Radien, also $AB = 3 + 2 = 5$, $BC = 2 + 1 = 3$ und $CA = 1 + 3 = 4$. Nun ist uns vielleicht bekannt, dass die Längen 3, 4 und 5 ein pythagoräisches Tripel bilden, also das Dreieck ABC rechtwinkelig ist mit rechtem Winkel in C.

    Die Fläche lässt sich daher leicht berechnen als $F = \frac{CA \cdot CB}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \mathbf{6}$.

12. $p + q$ ist sicher größer als p sowie größer als q jeweils für sich, da ja alle Zahlen positiv sind und etwas dazuzugeben die Summe daher größer macht. Weiters ist $p \cdot q$ kleiner als q, weil der Wert bei Multiplikation mit einer Zahl zwischen 0 und 1 kleiner wird. Ebenso ist $\frac{p}{q}$ kleiner als p, weil der Wert bei einer Division durch eine Zahl größer als 1 kleiner wird. Daher ist $\mathbf{p + q}$ am größten.

13. Das Volumen berechnet sich als Volumen = Grundfläche · Höhe. Die Grundfläche ihrerseits berechnet sich als Fläche eines Kreises. Sei r der Radius des Basiskreises von A. Dann ist die Grundfläche von A gleich $r^2 \cdot \pi$, und jene von B laut Angabe gleich $(r \cdot 1{,}1)^2 \cdot \pi = 1{,}21r^2 \cdot \pi$.

    Sei h_A die Höhe von A, dann ist das Volumen von A gleich $r^2 \cdot \pi \cdot h_A$. Sei h_B die Höhe von B, dann ist das Volumen von B gleich $1{,}21r^2 \cdot \pi \cdot h_B$.

    Laut Angabe sind diese beiden Volumen identisch, also $r^2 \cdot \pi \cdot h_A = 1{,}21r^2 \cdot \pi \cdot h_B$. Kürzt man auf beiden Seiten $r^2 \cdot \pi$, so bleibt $h_A = 1{,}21h_B$ übrig. Die Höhe von A ist also um **21%** größer als jene von B.

14. Jede Kante des Polyeders grenzt an genau ein Quadrat und genau ein Dreieck. Wir wissen, dass es 6 Quadrate gibt, also hat das Polyeder genau $6 \cdot 4 = 24$ Kanten. Jede dieser Kanten muss nun auch Seitenkante eines Dreiecks sein (und kann nicht Seitenkante von zwei Dreiecken sein), also ist klar, dass es genau $\frac{24}{3} =$ **8 Dreiecke** geben muss.

15. Falls bei allen vier Spielwürfeln dieselbe Ziffer unten liegt, kann es uns nicht gelingen, die Zahl 2017 zu bilden, weil uns ja eine Ziffer fehlt. Etwas schwieriger ist schon die Argumentation, warum es in allen anderen Fällen möglich ist. Zwar ist relativ "offensichtlich", dass sehr viele Möglichkeiten zur Verfügung stehen und es deshalb "schon irgendwie möglich sein wird" (und in der Wettbewerbssituation ist uns das wahrscheinlich genug). Um das wirklich zu beweisen, müssen wir aber eine explizite Methode angeben, wie man nach jedem möglichen Würfelergebnis eine Zuordnung finden kann, welcher Würfel welche Ziffer darstellt. Dazu unterscheiden wir einige Fälle nach der Häufigkeit der am häufigsten unten liegenden Ziffer.

    Es darf wie gesagt nicht dieselbe Ziffer bei allen vier Würfeln unten liegen, sonst gibt es keine Anordnung.

    Wenn dieselbe Ziffer bei drei Würfeln unten liegt, muss ich den vierten Würfel zur Darstellung dieser Ziffer verwenden. Die verbleibenden drei Würfel können jeweils jede der noch benötigten drei Ziffern darstellen, also ordne ich sie einfach in irgendeiner Reihenfolge den noch benötigten Ziffern zu und habe eine Anordnung gefunden.

    In allen anderen Fällen, also wenn jede Ziffer höchstens bei zwei Würfeln unten liegt, kann ich die vier Würfel so in zwei Paare aufteilen, dass jedes Paar aus zwei Würfeln besteht, die verschiedene Ziffern unten liegen haben.

    Zwischenüberlegung: Jedes solche Paar kann jede beliebige Kombination von zwei verschiedenen Ziffern darstellen: Wenn ich möchte, dass das Paar die Ziffern A und B darstellt, versuche ich zuerst, ob es möglich ist, A mit dem ersten und B mit dem zweiten Würfel darzustellen. Wenn das nicht geht, vertausche ich die beiden Ziffern. Dieser zweite Versuch ist sicher von Erfolg gekrönt: Nehmen wir an, im ersten Versuch war es nicht möglich, A am ersten Würfel darzustellen. (Es ist uns egal, ob B am zweiten Würfel möglich war oder nicht.) Dann ist nach der Vertauschung alles in Ordnung: Der erste Würfel hat A unten (sonst wäre A darzustellen ja möglich gewesen), also kann er B darstellen. Und der erste Würfel hat A unten, der zweite Würfel gemäß unserer Zusammenstellung des Paares eine andere Ziffer, also kann der zweite Würfel A darstellen. (Falls im ersten Versuch nur B nicht möglich war, gilt dasselbe Argument "analog" durch Vertauschung von "A" und "B".)

    Also verwende ich das erste Paar, um 2 und 0 darzustellen, und das zweite Paar um 1 und 7 darzustellen.

    Nach dieser etwas mühsamen Überlegung wissen wir nun also, dass nur jene Fälle ungünstig sind, in denen alle vier Würfel dieselbe Ziffer unten liegen haben. Insgesamt gibt es vier solche ungünstigen Würfelergebnisse (alle 2er unten, alle 0er unten, alle 1er unten, alle 7er unten) von insgesamt $4^4 = 256$ möglichen Ergebnissen. Die Wahrscheinlichkeit für ein günstiges Ergebnis ist also $\frac{\text{“günstige”}}{\text{“mögliche”}} = \frac{256-4}{256} = \frac{252}{256} = \mathbf{\frac{63}{64}}$.

16. Vielleicht ist einem der Satz geläufig, dass bei einem Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten alle Lösungen Teiler des konstanten Glieds, hier 24, sein müssen (Satz über rationale Nullstellen, Lemma von Gauß). Von den angebotenen Lösungsmöglichkeiten sind 1, -1, 3 und 6 Teiler von 24, aber nicht 5. Daher ist **5 sicher keine Lösung**.

    Wenn man diesen Satz nicht kennt, erkennt man dasselbe aber auch leicht durch einige Überlegungen über die Teilbarkeit durch 5: Setzt man $x = 5$ ein, so ist $5x^3 = 5^4$ durch 5 teilbar, ebenso $ax^2 = a \cdot 5^2$, und ebenso $bx = b \cdot 5$. Aber 24 ist nicht durch 5 teilbar, also kann die Summe nicht 0 werden, egal für welche Zahlen a und b.

    Nun bleibt, wenn man exakt sein, will, noch zu überprüfen, dass die anderen vier Zahlen Lösungen sein können, d.h. wir müssen jeweils mindestens ein Beispiel (von denen es reichlich gilt) für ein Polynom mit dieser Lösung angeben. Diese finden wir zum Beispiel durch Einsetzen und Ausprobieren:

    (A) Für $x = 1$ erhalten wir $5 + a + b + 24 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = -29$ setzen. Das Polynom $5x^3 - 29x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung 1.

    (B) Für $x = -1$ erhalten wir $-5 + a - b + 24 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = 19$ setzen. Das Polynom $5x^3 + 19x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung -1.

    (C) Für $x = 3$ erhalten wir $5 \cdot 27 + a \cdot 9 + b \cdot 3 + 24 = 0$, oder etwas vereinfacht $9a + 3b + 159 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = -53$ setzen. Das Polynom $5x^3 - 53x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung 3.

    (E) Für $x = 6$ erhalten wir $5 \cdot 216 + a \cdot 36 + b \cdot 6 + 24 = 0$, oder etwas vereinfacht $36a + 6b + 1104 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = -184$ setzen. Das Polynom $5x^3 - 184x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung 6.

17. Zuerst müssen wir heraufinden, wie groß das Quadrat wird. Es gilt $44^2 = 1936$ und $45^2 = 2025$, also geht sich ein Quadrat mit Seitenlänge 44 gerade noch aus, und ein Quadrat mit Seitenlänge 45 nicht mehr.

    Da die Seitenlänge gerade ist, liegen in jeder Zeile genau gleich viele weiße wie schwarze Plättchen. Daher ist genau die Hälfte der verwendeten Plättchen schwarz. Im Quadrat liegen also $\frac{44^2}{2} = 968$ schwarze und ebensoviele weiße Plättchen. Also bleiben $1009 - 968 =$ **41 schwarze und** $1008 - 968 =$ **40 weiße Plättchen** übrig.

18. Was passiert, wenn man zu einer Zahl 1 dazuaddiert? Falls die letzte Ziffer kleiner als 9 ist, wird nur die letzte Ziffer um 1 größer, also unterscheiden die Ziffernsummen sich um 1. Damit können nicht beide Ziffernsummen durch 7 teilbar sein.

    Also muss die letzte Ziffer 9 sein. Wenn die Zehnerziffer kleiner als 9 ist, wird die Einerziffer um 9 kleiner und die Zehnerziffer durch den Überlauf um 1 größer, die restlichen Stellen ändern sich nicht. Dann unterscheiden die Ziffernsummen sich um 8, also können wieder nicht beide durch 7 teilbar sein.

    Folglich muss auch die Zehnerziffer gleich 9 sein. Betrachten wir als nächstes die Hunderterziffer. Ist diese kleiner als 9, so ändert sich die Einerziffer von 9 zu 0, die Zehnerziffer von 9 zu 0, die Hunderterziffer wird um 1 größer, und der Rest ändert sich nicht. Die Ziffernsumme wird insgesamt um 17 kleiner, also sind nicht beide Ziffernsummen durch 7 teilbar.

    Also ist auch die Hunderterziffer gleich 9. Wenn die Tausenderziffer kleiner als 9 ist, ändern die drei hinteren Ziffern sich jeweils von 9 zu 0, und die Tausenderziffer wird um 1 größer. Die Ziffernsumme wird um 26 kleiner, wieder nicht durch 7 teilbar.

    Also ist die Tausenderziffer gleich 9. Wenn die Zehntausenderziffer kleiner als 9 ist, ändern sich die vier hinteren Ziffern jeweils von 9 zu 0, und die Zehntausenderziffer wächst um 1. Die Ziffernsumme wird um 35 kleiner, und dies ist nun endlich eine durch 7 teilbare Differenz. Bei einer Zahl, die auf 9999 endet, ist es also prinzipiell möglich, dass ihre Ziffernsumme durch 7 teilbar ist und man durch Addition von 1 eine weitere Zahl erhält, deren Ziffernsumme durch 7 teilbar ist.

    Die kürzestmögliche Zahl, die auf 9999 endet, ist 9999 selbst, aber deren Ziffernsumme ist nicht durch 7 teilbar. Wir ergänzen also eine erste Ziffer 6 und erhalten 69999, deren Ziffernsumme durch 7 teilbar ist. Tatsächlich ist auch die Ziffernsumme von $69999 + 1 = 70000$ durch 7 teilbar, also ist das tatsächlich das kleinstmögliche Paar solcher Zahlen. Die kleinere Zahl hat daher **mindestens 5 Stellen**.

19. Wir beschriften den Mittelpunkt mit M und die vier Diagonalenteilstücke mit $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$ und $DM = d$. Laut Satz von Pythagoras im rechtwinkeligen Dreieck AMB gilt $2017^2 = a^2+b^2$. Im Dreieck BMC gilt $2018^2 = b^2 + c^2$. Im Dreieck CMD gilt $2019^2 = c^2 + d^2$.

    Sei x die gesuchte Seite AD. Im Dreieck DMA gilt laut Pythagoras $x^2 = a^2 + d^2$. Durch geschicktes Zusammenfügen der schon bekannten Summen erhalten wir ohne viel zu rechnen:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + d^2 \\ &= a^2 + b^2 - b^2 - c^2 + c^2 + d^2 \\ &= 2017^2 - 2018^2 + 2019^2 \\ &= (2018-1)^2 - 2018^2 + (2018+1)^2 \\ &= 2018^2 - 2 \cdot 2018 + 1 - 2018^2 + 2018^2 + 2 \cdot 2018 + 1 \\ &= 2018^2 + 2 \end{aligned}$$

    Nun brauchen wir nur noch die Wurzel zu ziehen und erhalten $\mathbf{x = \sqrt{2018^2 + 2}}$.

20. Nehmen wir an, der erste und der zweite Satz sind wahr, die Zahl ist also größer als 50 und enthält die Ziffer 2. Da die Zehnerziffer nur mehr 5 oder größer sein kann, muss die Einerziffer gleich 2 sein. Dann stimmt aber auch die dritte Aussage "Es ist eine gerade Zahl.", und so viel Wahrheit nacheinander würde Lilli wohl kaum übers Herz bringen.

    Also muss entweder der erste oder der zweite Satz eine Lüge sein. Weiters heißt das, dass der dritte und sechste Satz wahr sein müssen. Folglich denkt Lilli an eine gerade Zahl, die eine Ziffer 7 enthält. Diese Ziffer 7 muss, weil die Zahl ja gerade ist, an der Zehnerstelle stehen. Somit ist die Zahl größer als 50, also ist auch Aussage 2 wahr, und damit wissen wir weiters, dass Aussage 5 wahr ist, und dass Aussagen 1 und 4 Lügen sind.

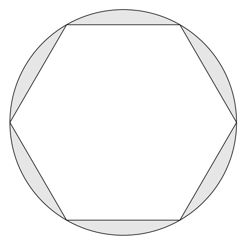
    Wir suchen also eine gerade Zahl zwischen 70 und 79, die durch 3 teilbar ist. Davon gibt es zwei: 72 und 78. Weil aber die erste Aussage eine Lüge ist, kann die Zahl keine Ziffer 2 enthalten. Die Zahl ist also 78, und ihre Ziffernsumme folglich **15**.

21. Wir betrachten eine Zahl, die diese Bedingung erfüllt, und stellen sie als $10x + y$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen x und y und mit $0 \leq y \leq 9$ dar. (Beispielsweise würden wir die Zahl 1234 also mit $x = 123$ und $y = 4$ als $10 \cdot 123 + 4$ darstellen.)

    Die Zahl ohne letzte Ziffer entspricht dann x. Die geforderte Eigenschaft lässt sich nun anschreiben als $x \cdot 14 = 10x + y$. Subtrahieren wir auf beiden Seiten $10x$, so bleibt $4x = y$.

    Nun kann y aber nicht besonders groß werden (nicht größer als 9 laut Definition), und soll gleichzeitig ein Vielfaches von 4 sein, also bleiben eigentlich nur die Fälle $y = 4$ und $y = 8$ übrig. Beide liefern tatsächlich Zahlen, die die Eigenschaft erfüllen: 14 wird nach Löschen der letzten Stelle zu 1, und 28 wird nach Löschen der letzten Stelle zu 2. Es gibt also **2 solche Zahlen**.

22. Wir zerschneiden die Blütenblätter jeweils der Länge nach und erhalten 12 gleiche Teile, von denen wir 6 beispielsweise wie folgt außen an das Sechseck ansetzen können, um wieder einen Kreis zu erhalten.
    Die Summe der Flächen dieser 6 Teile ist also gleich der Kreisfläche (mit Radius 1) minus der Sechseckfläche (die sich aus 6 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1 zusammensetzt), also $1^2 \cdot \pi - 6 \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Um die Fläche von allen 12 Teilen zu erhalten, brauchen wir das nur noch zu verdoppeln (und etwas zu vereinfachen), und erhalten $2 \cdot \left(1^2 \cdot \pi - 6 \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \mathbf{2\pi - 3\sqrt{3}}$.



23. Wir berechnen die ersten paar Folgenelemente:

    - $a_1 = 2017$
    - $a_2 = \frac{2017-1}{2017} = \frac{2016}{2017}$
    - $a_3 = \frac{\frac{2016}{2017}-1}{\frac{2016}{2017}} = \frac{\frac{2016}{2017}-1}{\frac{2016}{2017}} \cdot \frac{2017}{2017} = \frac{2016-2017}{2016} = \frac{-1}{2016}$
    - $a_4 = \frac{\frac{-1}{2016}-1}{\frac{-1}{2016}} = \frac{\frac{-1}{2016}-1}{\frac{-1}{2016}} \cdot \frac{2016}{2016} = \frac{-1-2016}{-1} = 2017$

    Jedes Element hängt nur vom direkt vorhergehenden ab. Da $a_4 = a_1$ gilt, muss also auch $a_5 = a_2$ gelten, dann $a_6 = a_3$, und so weiter. Das heißt, jedes dritte Folgenelement ist immer wieder dasselbe.
    Also ist $a_{999} = a_{996} = a_{993} = \cdots = a_3 = \mathbf{\frac{-1}{2016}}$.

24. Im dreidimensionalen Raum gilt: Wenn man bei einem Körper die Seitenlänge halbiert, schrumpft das Volumen auf ein Achtel. Das gesamte Tetraeder hat Volumen 1. Das oben abgeschnittene Tetraeder hat genau die halbe Seitenlänge vom großen Tetraeder, daher ist sein Volumen gleich $\frac{1}{8}$. Dasselbe gilt für alle vier Tetraeder, die abgeschnitten werden. Es verbleibt also ein Volumen von $1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

25. Wir bezeichnen die drei Längen mit a, b und c, wobei c die Hypotenuse sei. Laut Satz von Pythagoras gilt $c^2 = a^2 + b^2$. Wenn die Summe $a^2 + b^2 + c^2 = 128$ sein soll, folgt durch Einsetzen also $c^2 + c^2 = 128$, also $c^2 = 64$ und somit $c = 8$.

    Aus der Summe der Längen folgt dann $a + b = 18 - c = 18 - 8 = 10$. Natürlich könnte man ab diesem Punkt aus $a^2 + b^2 = 64$ und $a + b = 10$ relativ schnöde die beiden Werte ausrechnen. (Zum Beispiel $b = 10 - a$ in der ersten Gleichung einsetzen und die quadratische Gleichung lösen.)

    Da wir beim Bewerb für sowas aber keine Zeit haben (und außerhalb des Wettbewerbs keine Lust), und wir ja eigentlich nur das Produkt $\frac{ab}{2}$ brauchen um die Fläche des rechtwinkeligen Dreiecks zu berechnen, bedienen wir uns eines mathematischen Tricks und kombinieren die beiden schon bekannten Gleichungen geschickt. Konkret betrachten wir den Term $(a + b)^2 - a^2 - b^2$. Dieser ist einerseits, wenn man ihn ausmultipliziert, gleich $2ab$. Andererseits aber können wir auch die bekannten Summen einsetzen und erhalten $(10)^2 - (64) = 100 - 64 = 36$.

    Wenn also $2ab = 36$ gilt, dann ist die Fläche $\frac{ab}{2} = \mathbf{9}$.

26. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten in den fünf Fällen, wobei die Gesamtwahrscheinlichkeit immer der Durchschnitt der Wahrscheinlichkeiten der fünf Schachteln ist.

    (A) In jeder Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel bei 50%, somit auch im Durchschnitt über alle fünf Schachteln.

    (B) In drei Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 0%, in zwei Schachteln 100%, somit im Durchschnitt 40%.

    (C) In vier Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 0%, in einer Schachtel 100%, somit im Durchschnitt 20%.

    (D) In vier Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 0%, in einer Schachtel $\frac{5}{6} \approx 83.33\%$, somit im Durchschnitt $\approx 16.67\%$.

    (E) In vier Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 100%, in einer Schachtel $\frac{1}{6} \approx 16.67\%$, somit im Durchschnitt $\approx 83.33\%$.

    Die geringsten Chancen für Beate, eine weiße Kugel zu ziehen, bestehen also bei **Verteilung (D)**.

27. Wir bezeichnen die Zahl im mittleren Feld mit x. Für ein fixes x erhält man die größtmögliche Summe, wenn die vier zu x benachbarten Felder jeweils $x + 1$ enthalten, und die vier Eckfelder jeweils $x + 2$. Die Summe beträgt dann $9x + 12$. Wenn diese gleich 500 sein soll, muss x also größer als 54 sein, sonst kommt man an diese Summe nicht heran.

    Die kleinstmögliche Summe für ein festes x erhält man, indem man in die benachbarten Felder $x - 1$ und in die Eckfelder $x - 2$ schreibt, diese Summe beträgt $9x - 12$. Damit diese 500 sein kann, muss x kleiner als 57 sein, sonst wird die Summe zu groß.

    Es stehen für x also nur noch die Werte 55 oder 56 zur Verfügung. Als nächstes betrachten wir, welche Zahlen gerade oder ungerade sein müssen. Wenn x ungerade ist, sind die benachbarten Felder gerade, und die Eckfelder wieder ungerade. Dann wäre die Summe ungerade und somit sicher nicht 500. Also können wir auch 55 ausschließen.

    Somit kann nur noch **56 im mittleren Feld** stehen.

    Wenn man mathematisch genau sein will, gibt man auch an dieser Stelle wieder ein Beispiel an, dass 56 auch tatsächlich im mittleren Feld stehen kann – es könnte ja auch sein, dass die Angabe falsch ist und es überhaupt keine Zahl gibt, die alle geforderten Bedingungen erfüllt. Glücklicherweise finden wir aber schnell das folgende Beispiel:

56	55	56
55	56	55
56	55	56

28. Der einzige Trick bei diesem Beispiel besteht darin, nur nicht zu lange zu versuchen, es elegant zu lösen, sondern einfach die notwendigen Fallunterscheidungen durchzuackern. (Wenn irgendetwas in Betragsstrichen steht, bietet es sich immer an, zwei Fälle zu betrachten, einen, in dem der Wert dazwischen positiv ist, und einen, in dem er negativ ist.)

    Wenn y positiv ist, dann ist $|y| - y = 0$, also folgt aus der zweiten Gleichung $x + |y| - y = 10$, dass $x = 10$ gelten muss. Dann folgt aus der ersten Gleichung $|x| + x + y = 5$ durch Einsetzen aber $10 + 10 + y = 5$ und daher $y = -15$, ein Widerspruch dazu, dass y positiv ist.

    Also muss y negativ sein. Wenn x ebenfalls negativ wäre, würde aus der ersten Gleichung $|x| + x + y = 5$ folgen, dass $y = 5$ ist, ein Widerspruch dazu, dass wir bereits wissen, dass y negativ sein muss.

    Also muss x positiv und y nach wie vor negativ sein. Dann vereinfachen sich die Gleichungen zu $2x+y = 5$ und $x - 2y = 10$. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2 und addieren beide, sodass wir $4x + 2y + x - 2y = 10 + 10$ erhalten, vereinfacht also $5x = 20$ und somit $x = 4$. Es folgt aus $x - 2y = 10$ weiters $y = -3$.

    Für die Summe gilt daher $\mathbf{x + y = 1}$.

29. Zunächst überlegen wir, welche dreiziffrigen Zweierpotenzen es überhaupt gibt, und finden $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ und $2^9 = 512$. Wenn man eine solche Zweierpotenz 2^X auf irgendeine Art und Weise als Y^Z darstellen will, so muss Y selbst eine Zweierpotenz und Z ein Teiler von X sein. Beispielsweise lässt sich 2^8 also als 2^8, als 4^4, als 16^2 oder als 256^1 darstellen. Für diese Aufgabe werden wir für jede dieser möglichen Darstellungen versuchen, Werte für A, B und C zu finden, sodass der Klammerausdruck $(A + B) = Y$ und die Hochzahl $C = Z$ ist.

    Weiters ist zu beachten, dass A, B und C Ziffern einer dreiziffrigen Zahl sein müssen, das heißt es muss insbesondere gelten, dass $0 \leq A, B, C \leq 9$ und dass $A \neq 0$.

    - Fall 2^7: Da 7 eine Primzahl ist, gibt es nur die Darstellungsmöglichkeiten 2^7 oder 128^1.
        - Darstellung 2^7: Hier gilt auf jeden Fall $C = 7$. Weiters muss gelten $A + B = 2$. Dafür gibt es die Möglichkeiten $A = B = 1$ und $A = 2$, $B = 0$, insgesamt also die Zahlen 117 und 207.
        - Darstellung 128^1: Wir bräuchten $A + B = 128$, aber da die Ziffern höchstens 9 sein können, ist das natürlich nicht möglich.
    - Fall 2^8:
        - Darstellung 2^8: Hier gilt $C = 8$. Weiters muss gelten $A + B = 2$. Dafür gibt es dieselben Möglichkeiten wie im Fall 2^7, womit wir die Zahlen 118 und 208 erhalten.
        - Darstellung 4^4: Hier gilt $C = 4$. Weiters muss gelten $A + B = 4$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 404, 314, 224, 134.
        - Darstellung 16^2: Hier gilt $C = 2$. Weiters muss gelten $A+B = 16$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 972, 882, 792.
        - Darstellung 256^1: Wir bräuchten $A + B = 256$, aber da die Ziffern höchstens 9 sein können, ist das natürlich nicht möglich.
    - Fall 2^9:
        - Darstellung 2^9: Hier gilt $C = 9$. Weiters muss gelten $A + B = 2$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 119 und 209.
        - Darstellung 8^3: Hier gilt $C = 3$. Weiters muss gelten $A + B = 8$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 803, 713, 623, 533, 443, 353, 263, 173.
        - Darstellung 512^1: Wir bräuchten $A + B = 512$, aber da die Ziffern höchstens 9 sein können, ist das natürlich nicht möglich.

    Alles in allem haben wir **21 Möglichkeiten** gefunden.

30. Wir betrachten **alle(!)** möglichen Verteilungen von Edlen und Lügnern auf der Insel, die die geforderten Bedingungen erfüllen. Wenn wir gewissenhaft alle überhaupt möglichen Verteilungen finden, dann beschreibt diejenige davon, in der es die meisten Edlen gibt, wieviele Edle es höchstens geben kann.

    Zunächst einmal betrachten wir, was passiert, wenn beim Bankett nur Lügner sitzen. Dann hat einmal jeder von ihnen mit seiner Aussage sicher gelogen, also ist diese Bedingung erfüllt. Es müssen mindestens 1001 Personen beim Bankett sitzen (wobei auch alle 2017 beim Bankett sitzen können). Die restlichen Personen auf der Insel können alle entweder Edle oder Lügner sein, da es hier keine weiteren Einschränkungen mehr gibt. Unter all diesen Konfigurationen hat also diejenige die meisten Edlen, bei der möglichst wenig Leute beim Bankett sitzen, und alle anderen Edle sind. Das wären dann $2017 - 1001 = 1016$ Edle.

Nun überlegen wir, was passiert, wenn auch nur ein einziger Edler beim Bankett sitzt. Nennen wir diesen Edlen Arthur. Dieser sagt, er sitzt neben einem Edlen und einem Lügner, und da er ja die Wahrheit sagt, muss das auch so sein. Sein edler Nachbar Lancelot macht dieselbe Aussage. Für Lancelot ist Arthur der edle Nachbar, also muss Lancelots anderer Nachbar ein Lügner sein.

Dieser Lügner, Mordred, behauptet ebenfalls, er würde neben einem Edlen und einem Lügner sitzen. Neben einem Edlen sitzt er sicher, nämlich neben Lancelot. Wenn sein anderer Nachbar ein Lügner wäre, dann hätte Mordred versehentlich die Wahrheit gesagt! Das kann nicht sein, also muss Mordred zwischen zwei Edlen sitzen.

Für Mordreds zweiten edlen Nachbarn gilt nun aber wieder dasselbe Argument wie für Arthur, und für dessen Nachbar wieder dieselbe Überlegung wie für Lancelot, und für diesen wieder dieselbe wie für Mordred, und so weiter und so fort. Rund um den Tisch sitzen also immer abwechselnd zwei Edle und ein Lügner, dann wieder zwei Edle und ein Lügner, und so weiter.

Das heißt weiters, dass die Anzahl der Personen beim Bankett durch 3 teilbar sein muss. Es können also $1002, 1005, 1008, \ldots,$ oder 2016 beim Bankett sitzen. Wie zuvor können alle anderen Personen ganz frei entscheiden, ob sie Edle oder Lügner sind.

Unter all diesen Konfigurationen findet man also die meisten Edlen, wenn möglichst wenig Leute beim Bankett sitzen – also 1002, davon sind zwei Drittel Edle – und alle, die nicht am Bankett teilnehmen, Edle sind. In diesem Fall gibt es also $\frac{2}{3} \cdot 1002 + (2017 - 1002) =$ **1683 Edle**.