# KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
# 16. 3. 2017

Kategorie: Student, Schulstufe: 11 – 13

| | |
|---|---|
| Name: | |
| Schule: | |
| Klasse: | |

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

**Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2017“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
**1.)** zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

**2.)** zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden.
Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

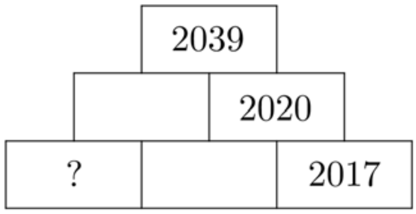


Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

# Känguru der Mathematik 2017
# Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
# Österreich - 16. 3. 2017

## - 3 Punkte Beispiele -

**1** In der abgebildeten Zahlenmauer ist die Zahl auf jedem Ziegel gleich der Summe der Zahlen auf den beiden darunter liegenden Ziegeln.
Welche Zahl steht auf dem mit „?“ markierten Ziegel?

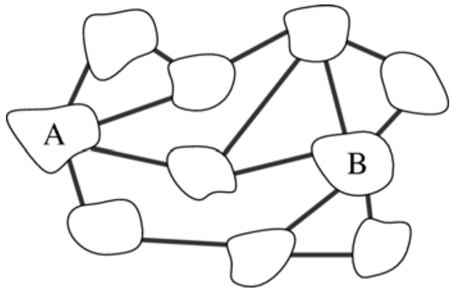



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

**2** Viele Modelleisenbahnen verwenden den H0-Maßstab 1:87. Benjamin besitzt für seine Eisenbahn ein genau 2 cm hohes Modell seines Bruders im H0-Maßstab. Wie groß ist sein Bruder in Wirklichkeit?

(A) 1,74 m (B) 1,62 m (C) 1,86 m (D) 1,94 m (E) 1,70 m

**3** In der Abbildung sehen wir 10 Inseln, die durch 15 Brücken verbunden sind. Wie viele Brücken müssen mindestens gesperrt werden, damit es von $A$ nach $B$ keine Brückenverbindung mehr gibt?

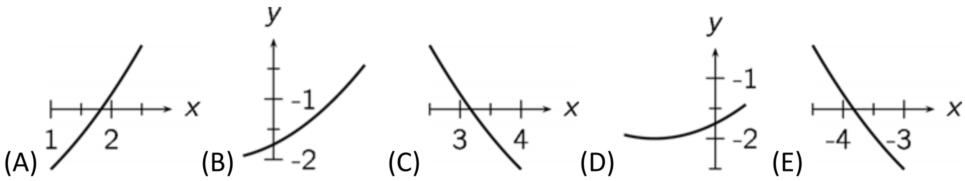



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

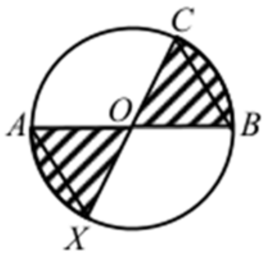
**4** Zwei positive Zahlen $a$ und $b$ haben die Eigenschaft, dass 75 % von $a$ gleich 40 % von $b$ sind. Daraus folgt:

(A) $15a = 8b$ (B) $7a = 8b$ (C) $3a = 2b$ (D) $5a = 12b$ (E) $8a = 15b$

**5** Vier der folgenden fünf Bilder zeigen Ausschnitte aus dem Graphen derselben quadratischen Funktion. Welcher Ausschnitt gehört nicht dazu?

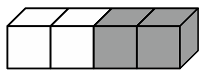


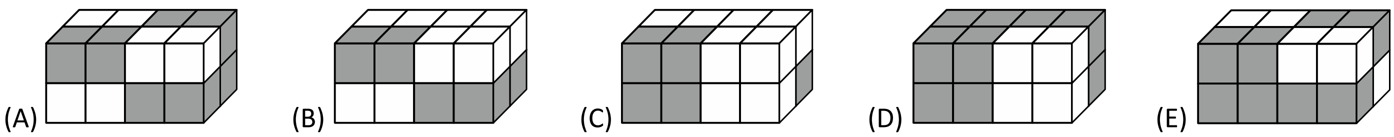

**6** Die Abbildung zeigt einen Kreis mit Mittelpunkt $O$ und den Durchmessern $AB$ und $CX$. Es gilt $OB = BC$. Welcher Anteil der Kreisfläche ist schraffiert?



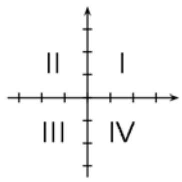

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{4}{11}$

**7** Ein $4 \times 1 \times 1$ Quader ist wie abgebildet aus 2 weißen und 2 grauen Würfeln zusammengesetzt. Welchen der folgenden Quader kann man aus lauter solchen $4 \times 1 \times 1$ Quadern bauen?






**8** Welcher Quadrant enthält keinen Punkt des Graphen der linearen Funktion $f(x) = -3{,}5x + 7$?




(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) Jeder Quadrant enthält mindestens einen Punkt des Graphen.

**9** In jeder der fünf Schachteln (A) bis (E) befinden sich rote und blaue Bälle. Benedikt möchte ohne hinzusehen genau einen Ball aus einer dieser Schachteln entnehmen, und hofft darauf, einen blauen Ball zu erwischen. Bei welcher Schachtel ist die Wahrscheinlichkeit dafür am größten?

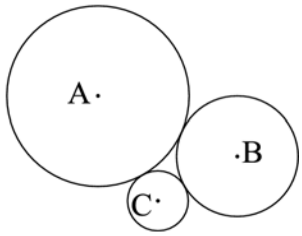
(A) 10 blaue, 8 rote (B) 6 blaue, 4 rote (C) 8 blaue, 6 rote (D) 7 blaue, 7 rote (E) 12 blaue, 9 rote

**10** Der Graph welcher der folgenden Funktionen hat die meisten Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion $f(x) = x$ ?

(A) $g_1(x) = x^2$ (B) $g_2(x) = x^3$ (C) $g_3(x) = x^4$ (D) $g_4(x) = -x^4$ (E) $g_5(x) = -x$

## - 4 Punkte Beispiele -

**11** Drei Kreise mit den Mittelpunkten $A$, $B$, $C$ berühren einander paarweise von außen (siehe Abbildung). Ihre Radien sind 3, 2 und 1.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$?



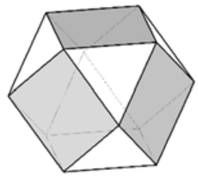

(A) 6 (B) $4\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) 9 (E) $2\sqrt{6}$

**12** Die positive Zahl $p$ ist kleiner als 1, und die Zahl $q$ ist größer als 1.
Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

(A) $p \cdot q$ (B) $p + q$ (C) $\frac{p}{q}$ (D) $p$ (E) $q$

**13** Zwei Drehzylinder $A$ und $B$ haben dasselbe Volumen. Der Radius des Basiskreises von $B$ ist um 10 % größer als jener von $A$. Um wie viel ist die Höhe von $A$ größer als jene von $B$?
(A) 5 % (B) 10 % (C) 11 % (D) 20 % (E) 21 %

**14** Jede Seitenfläche des abgebildeten Polyeders ist entweder ein Dreieck oder ein Quadrat.
Jedes Quadrat grenzt an 4 Dreiecke, und jedes Dreieck grenzt an 3 Quadrate. Das Polyeder hat 6 Quadrate. Wie viele Dreiecke hat es?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

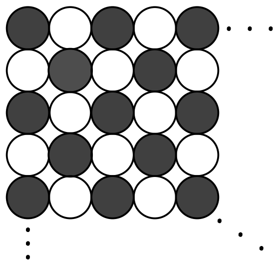
**15** Die vier Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den vier Ziffern 2, 0, 1 und 7 beschriftet (auf jeder Seitenfläche eine Ziffer). Für ein Spiel werden vier derartige Tetraeder als faire Spielwürfel verwendet. Alle vier Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen. Drei der vier Seitenflächen jedes Spielwürfels sind dann von oben sichtbar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mit jeweils genau einer der drei sichtbaren Ziffern von jedem Würfel die Zahl 2017 bilden können?

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{63}{64}$ (C) $\frac{81}{256}$ (D) $\frac{3}{32}$ (E) $\frac{29}{32}$

**16** Das Polynom $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ hat ganzzahlige Koeffizienten $a$ und $b$.
Welche der folgenden Zahlen ist sicher keine Lösung der Gleichung $5x^3 + ax^2 + bx + 24 = 0$?

(A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

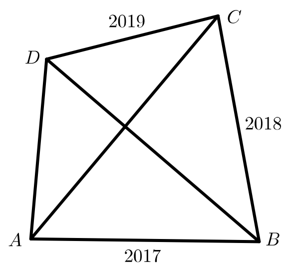
**17** Julia hat 2017 runde Spielplättchen zur Verfügung: 1009 schwarze und 1008 weiße.
Sie möchte damit wie abgebildet ein möglichst großes quadratisches Muster legen und beginnt mit einem schwarzen Plättchen links oben. In weiterer Folge legt sie die Plättchen so, dass sie in jeder Zeile und jeder Spalte farblich abwechseln. Wie viele Plättchen bleiben ihr übrig, wenn sie das größtmögliche Quadrat gelegt hat?



(A) keine (B) 40 von jeder Farbe (C) 40 schwarze und 41 weiße
(D) 41 von jeder Farbe (E) 40 weiße und 41 schwarze

**18** Auf einer Tafel stehen zwei aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen, deren Ziffernsummen jeweils durch 7 teilbar sind. Wie viele Ziffern muss die kleinere der beiden Zahlen mindestens haben?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

**19** Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen zueinander normal. Die Seiten haben die Längen $AB = 2017$, $BC = 2018$ und $CD = 2019$ (Abbildung nicht maßstabsgetreu). Wie lang ist die Seite $AD$?




(A) 2016 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ (D) $\sqrt{2018^2 + 2}$ (E) 2020

**20** Lilli versucht, ein braves Känguru zu sein, aber es macht ihr einfach zu viel Spaß, zwischendurch zu lügen. Daher ist jede dritte Aussage von ihr eine Lüge; der Rest ist wahr. Manchmal beginnt sie mit einer Lüge und manchmal auch mit ein oder zwei wahren Aussagen. Lilli denkt an eine zweiziffrige Zahl und sagt zu ihrem Freund:

1: „Eine Ziffer der Zahl ist eine 2.“ 2: „Die Zahl ist größer als 50.“ 3: „Es ist eine gerade Zahl.“
4: „Die Zahl ist kleiner als 30.“ 5: „Die Zahl ist durch 3 teilbar.“ 6: „Eine Ziffer der Zahl ist eine 7.“
Wie groß ist die Ziffernsumme der Zahl, an die Lilli denkt?

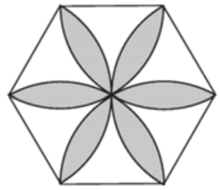
(A) 9 (B) 12 (C) 13 (D) 15 (E) 17

## - 5 Punkte Beispiele -

**21** Wie viele positive ganze Zahlen haben die Eigenschaft, dass man durch Löschen der letzten Ziffer eine neue Zahl erhält, die genau gleich 1/14 der ursprünglichen Zahl ist?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

**22** Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 1. Die graue Blume wird von Kreisbögen mit Radius 1 umrandet, deren Mittelpunkte in den Eckpunkten des Sechsecks liegen.
Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Blume?

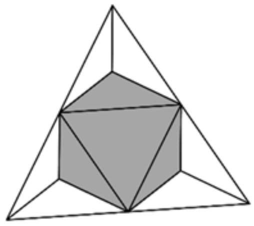


(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\pi$ (D) $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}$ (E) $2\pi-3\sqrt{3}$

**23** Wir betrachten die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_1 = 2017$ und $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$. Dann gilt: $a_{999} =$

(A) $-2017$ (B) $2017$ (C) $\frac{2016}{2017}$ (D) $1$ (E) $-\frac{1}{2016}$

**24** Wir betrachten ein regelmäßiges Tetraeder mit Volumen 1. Seine vier Ecken werden durch Ebenen abgeschnitten, die durch die Mittelpunkte der jeweiligen Kanten gehen (siehe Abbildung).
Wie groß ist das Volumen des verbleibenden Körpers?



(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$

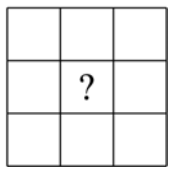
**25** Die Summe der Längen der drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks beträgt 18. Die Summe der Quadrate dieser drei Längen beträgt 128. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

(A) 18 (B) 16 (C) 12 (D) 10 (E) 9

**26** Anna hat fünf Schachteln, sowie fünf schwarze Kugeln und fünf weiße Kugeln. Sie darf entscheiden, wie sie die Kugeln auf die Schachteln verteilt, solange sie in jede Schachtel mindestens eine Kugel legt. Beate wählt zufällig eine Schachtel und zieht daraus blind eine Kugel. Beate gewinnt, wenn sie eine weiße Kugel zieht. Andernfalls gewinnt Anna.
Wie soll Anna die Kugeln verteilen, um die höchste Gewinnwahrscheinlichkeit zu erreichen?

(A) Anna gibt in jede Schachtel je eine weiße und eine schwarze Kugel.
(B) Anna verteilt die schwarzen Kugeln auf drei Schachteln und die weißen Kugeln auf die restlichen zwei Schachteln.
(C) Anna verteilt die schwarzen Kugeln auf vier Schachteln und legt alle weißen Kugeln in die verbliebene Schachtel.
(D) Anna legt alle weißen Kugeln in die gleiche Schachtel und legt dann je eine schwarze Kugel in jede Schachtel.
(E) Anna legt alle schwarzen Kugeln in die gleiche Schachtel und legt dann je eine weiße Kugel in jede Schachtel.

**27** In die Felder einer $3 \times 3$-Tabelle wurden neun ganze Zahlen geschrieben. Die Summe dieser neun Zahlen ist 500. Wir wissen, dass sich die Zahlen in zwei benachbarten Feldern (mit einer gemeinsamen Seitenkante) jeweils um genau 1 unterscheiden.
Welche Zahl steht im mittleren Feld?




(A) 50 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

**28** Wie groß ist $x+y$ , wenn sowohl $|x|+x+y=5$ als auch $x+|y|-y=10$ gilt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

**29** Wie viele dreiziffrige Zahlen $ABC$ gibt es, sodass $(A+B)^C$ eine dreiziffrige Zweierpotenz ist?

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 21

**30** Auf einer Insel leben 2017 Personen. Jede von ihnen ist entweder ein Lügner (der immer lügt) oder ein Edler (der immer die Wahrheit sagt). Mehr als tausend von ihnen nehmen an einem Bankett teil, wobei sie alle gemeinsam an einem großen runden Tisch sitzen. Alle sagen „Von meinen beiden Sitznachbarn ist einer ein Lügner und einer ein Edler." Wie viele Edle gibt es höchstens auf der Insel?

(A) 1683 (B) 668 (C) 670 (D) 1344 (E) 1343