KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Kategorie: Student, Schulstufe: 11 – 13

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2016“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Punkte Beispiele -

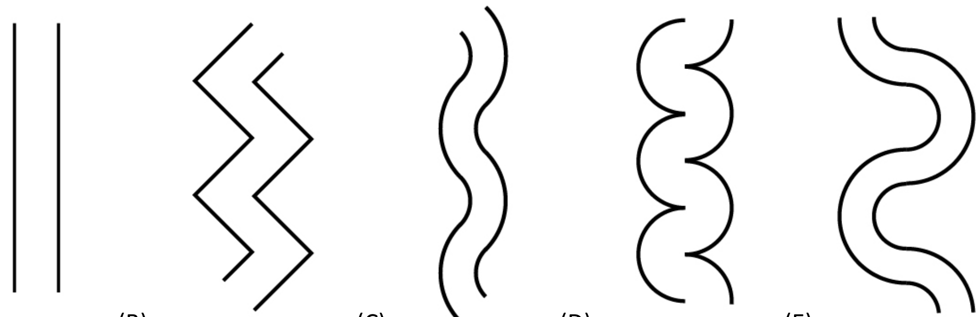
1. Die Summe der Alter von Tom und Johann ist 23. Die Summe der Alter von Johann und Alex ist 24 und die Summe der Alter von Alex und Tom ist 25. Wie alt ist der Älteste von ihnen?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

2. Die Summe $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ ergibt

(A) $\frac{3}{111}$ (B) $\frac{111}{1110}$ (C) $\frac{111}{1000}$ (D) $\frac{3}{1000}$ (E) $\frac{3}{1110}$

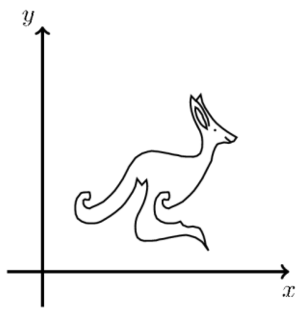
3. Maria möchte eine Brücke über einen Fluss bauen. Dieser Fluss hat die besondere Eigenschaft, dass von jedem Punkt am einen Ufer aus die kürzest mögliche Brücke ans andere Ufer immer gleich lang ist. Welches der folgenden Bilder ist sicher keine Abbildung dieses Flusses?



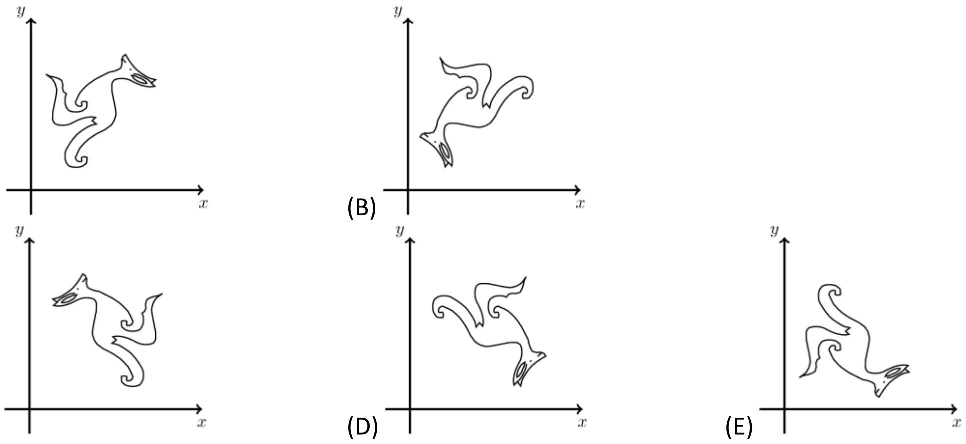
(A) (B) (C) (D) (E)

4. Wie viele ganze Zahlen sind größer als $2015 \cdot 2017$, aber kleiner als $2016 \cdot 2016$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2017



5. Eine Punktmenge ergibt wie abgebildet in der *xy*-Ebene das Bild eines Kängurus. Für jeden Punkt werden die *x*- und *y*-Koordinaten vertauscht. Wie sieht das resultierende Bild aus?



(A) (B) (C) (D) (E)

6. Wie viele Ebenen benötigt man mindestens, um einen begrenzten Bereich im dreidimensionalen Raum einzugrenzen?

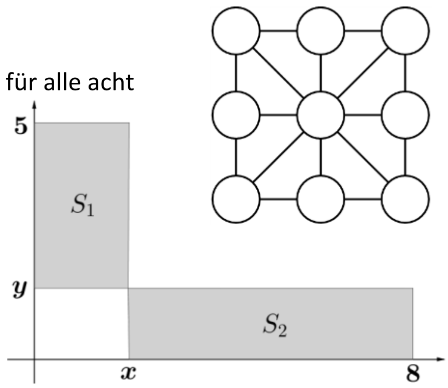
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

7. Diana möchte in jeden Kreis des vorgegebenen Musters ganze Zahlen so eintragen, dass für alle acht kleinen Dreiecke die Summe der drei Zahlen an den Ecken gleich sind. Wie viele verschiedene Zahlen kann sie dabei höchstens verwenden?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8

8. Die Rechtecke S_1 und S_2 im Bild haben dieselbe Fläche. Bestimme das Verhältnis $x : y$.

(A) $1 : 1$ (B) $3 : 2$ (C) $4 : 3$ (D) $7 : 4$ (E) $8 : 5$

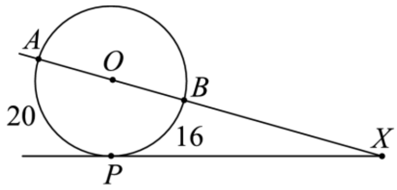


9. Wenn $x^2 - 4x + 2 = 0$ gilt, so ist $x + \frac{2}{x}$ gleich

(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

10. In der Abbildung sehen wir einen Kreis mit Mittelpunkt *O*, sowie eine Tangente an diesen Kreis mit Berührpunkt *P*. Der Bogen *AP* hat die Länge 20, der Bogen *BP* die Länge 16. Wie groß ist der Winkel $\angle AXP$?

(A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° (E) 10°

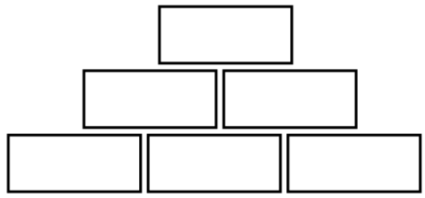


- 4 Punkte Beispiele -

11. a, b, c, d sind positive ganze Zahlen, für die $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$ gilt.
Welche der vier Zahlen a, b, c und d ist am größten?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) Es ist nicht eindeutig bestimmt.

12. In dieser Zahlenpyramide ist die Zahl in jedem der oberen Felder gleich dem Produkt der beiden Zahlen in den unmittelbar darunterliegenden Feldern. Welche der folgenden Zahlen kann im obersten Feld nicht auftreten, wenn die Felder der untersten Reihe jeweils nur natürliche Zahlen größer als 1 enthalten?



(A) 56 (B) 84 (C) 90 (D) 105 (E) 220

13. Welchen Wert nimmt x_4 an, wenn $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = {x_n}^{x_n}$ für $n \geq 1$ gilt?

(A) 2^{2^3} (B) 2^{2^4} (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

14. Im Rechteck $ABCD$ ist die Seite $\overline{BC}$ genau halb so lang wie die Diagonale $\overline{AC}$. Es sei *X* jener Punkt auf $\overline{CD}$, für den $|\overline{AX}| = |\overline{XC}|$ gilt. Wie groß ist der Winkel $\angle CAX$?

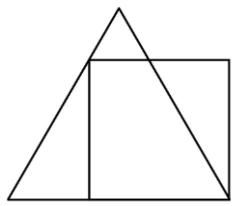
(A) 12,5° (B) 15° (C) 27,5° (D) 42,5° (E) ein anderer Winkel

15. Diana zerschneidet ein Rechteck mit der Fläche 2016 in 56 identische Quadrate. Die Seitenlängen des Rechtecks und der Quadrate sind lauter ganze Zahlen. Für wie viele verschiedene Rechtecke kann sie dies tun? (Zwei Rechtecke gelten als verschieden, wenn sie nicht kongruent sind.)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 0

16. Der Umfang des Quadrats in der Figur ist 4. Dann ist der Umfang des gleichseitigen Dreiecks

(A) 4 (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3 + \sqrt{2}$ (E) $4 + \sqrt{3}$



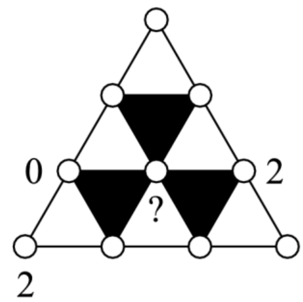
17. Auf der Insel der Ritter und Lügner ist jeder entweder ein Ritter (der nur die Wahrheit sagt) oder ein Lügner (der immer lügt). Während deiner Reise auf der Insel triffst du auf 7 Personen, die im Kreis um ein Lagerfeuer sitzen. Sie sagen dir alle „Ich sitze zwischen zwei Lügnern!“. Wie viele Lügner sitzen am Lagerfeuer?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) Man benötigt mehr Information, um dies zu entscheiden.

18. Drei dreiziffrige Zahlen werden aus den Ziffern von 1 bis 9 so gebildet, dass jede der neun Ziffern genau einmal verwendet wird. Welche der folgenden Zahlen kann nicht die Summe der drei Zahlen sein?

(A) 1500 (B) 1503 (C) 1512 (D) 1521 (E) 1575

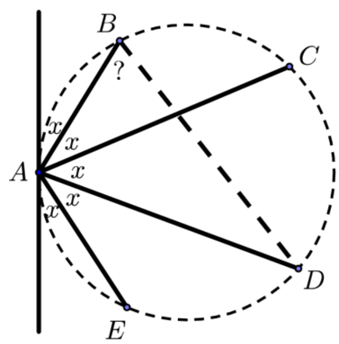
19. Jeder der zehn Punkte in der Figur ist mit einer der Zahlen 0, 1 oder 2 beschriftet. Es ist bekannt, dass die Summe der Zahlen an den Eckpunkten jedes weißen Dreiecks durch 3 teilbar ist, während die Summe der Zahlen an den Eckpunkten jedes schwarzen Dreiecks nicht durch 3 teilbar ist. Drei der Punkte sind bereits so beschriftet, wie in der Figur vorgegeben. Mit welchen Zahlen kann der innere Punkt beschriftet werden?



(A) nur 0 (B) nur 1 (C) nur 2 (D) nur 0 und 1 (E) entweder 0 oder 1 oder 2

20. Bettina wählt fünf Punkte A, B, C, D und E auf einem Kreis und zeichnet die Kreistangente im Punkt A. Sie bemerkt, dass die fünf mit x beschrifteten Winkel alle gleich groß sind. (Beachte, dass die Figur nicht im Maßstab gezeichnet ist!)
Wie groß ist der Winkel $\angle ABD$?

(A) 66° (B) 70,5° (C) 72° (D) 75° (E) 77,5°



- 5 Punkte Beispiele -

21. Wie viele verschiedene reelle Lösungen hat die Gleichung

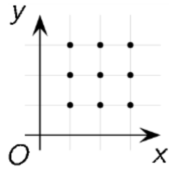
$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1 \qquad ?$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) unendlich viele

22. Ein Viereck besitzt einen Inkreis (d.h. alle vier Seiten des Vierecks sind Tangenten an den Kreis). Das Verhältnis vom Umfang des Vierecks zu dem des Kreises beträgt 4:3. Das Verhältnis von der Fläche des Vierecks zu dem des Kreises ist dann

(A) $4{:}\,\pi$ (B) $3\sqrt{2}{:}\,\pi$ (C) $16{:}\,9$ (D) $\pi : 3$ (E) $4 : 3$

23. Wie viele quadratische Funktionen $y = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$) haben Graphen, die durch mindestens 3 der markierten Punkte gehen?



(A) 6 (B) 15 (C) 19 (D) 22 (E) 27

24. Im rechtwinkeligen Dreieck ABC (mit rechtem Winkel in A) schneiden einander die Winkelsymmetralen der spitzen Winkel im Punkt P . Der Abstand von P zur Hypotenuse beträgt $\sqrt{8}$. Wie groß ist der Abstand von P zu A ?

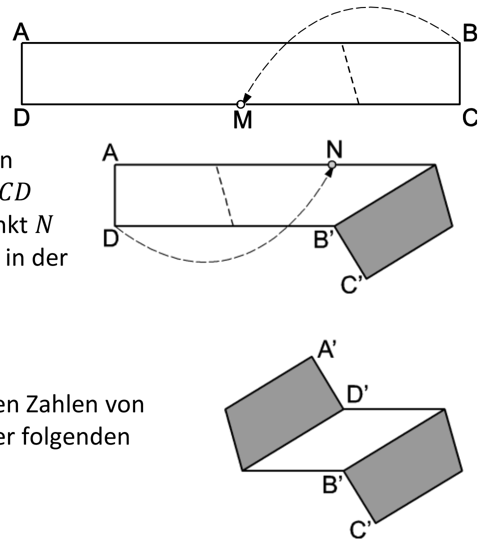
(A) 8 (B) 3 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$ (E) 4

25. Die Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $x^2 + bx + a = 0$ haben beide reelle Lösungen. Es ist bekannt, dass die Summe der Quadrate der Lösungen der ersten Gleichung gleich der Summe der Quadrate der Lösungen der zweiten Gleichung ist, und dass $a \neq b$ gilt. Dann ist $a + b$ gleich

(A) 0 (B) -2 (C) 4 (D) -4 (E) Die Summe kann nicht eindeutig bestimmt werden.

26. In einem festen Würfel ist *P* ein Punkt im Inneren. Wir zerschneiden den Würfel in 6 (schiefe) Pyramiden. Jede Pyramide besitzt eine Seitenfläche des Würfels als Basisfläche und den Punkt *P* als Spitze. Die Volumina von fünf dieser Pyramiden betragen 2, 5, 10, 11 und 14. Wie groß ist das Volumen der sechsten Pyramide?

(A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12



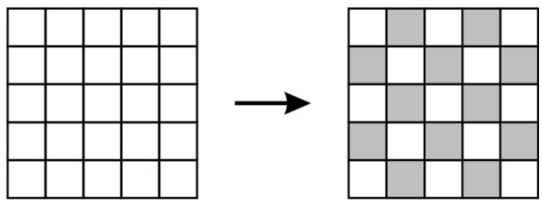
27. Ein rechteckiger Papierstreifen $ABCD$ ist 5 cm breit und 50 cm lang. Der Streifen ist auf einer Seite weiß und auf der anderen Seite grau. Christina faltet den Streifen wie abgebildet so, dass der Eckpunkt B mit dem Mittelpunkt M der Seite CD zusammenfällt. Anschließend faltet sie so, dass der Eckpunkt D mit dem Mittelpunkt N der Seite AB zusammenfällt. Wie groß ist die Fläche des sichtbaren weißen Stücks in der Figur?

(A) 50 cm² (B) 60 cm² (C) 62,5 cm² (D) 100 cm² (E) 125 cm²

28. Anna wählt eine positive ganze Zahl n und notiert die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n. Eine Primzahl p teilt diese Summe, aber keine der Summanden. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert von $n + p$?

(A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269

29. Wir betrachten ein 5×5 Quadrat, das in 25 Felder aufgeteilt ist. Zu Beginn sind alle Felder weiß. In jedem Zug ist es erlaubt, die Farben von drei in einer waagrechten oder senkrechten Linie aneinander grenzenden Feldern zu tauschen (d.h. weiße Felder werden schwarz und schwarze werden weiß). Was ist die kleinste Anzahl von Zügen, mit denen man die in der Figur abgebildete Schachbrettfärbung erreichen kann?



(A) weniger als 10 (B) 10 (C) 12 (D) mehr als 12 (E) Diese Färbung kann nicht erreicht werden.

30. Die positive ganze Zahl N hat genau sechs verschiedene (positive) Teiler, inklusive 1 und N. Das Produkt von fünf dieser Teiler ist 648. Welche der folgenden Zahlen ist der sechste Teiler von N?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24