Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 17. 03. 2016

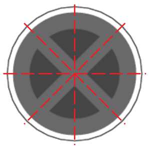
3 Punkte Beispiele

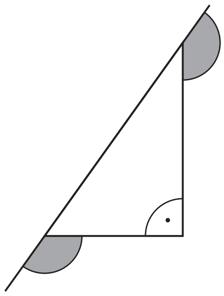
1. Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 3,17 und 20,16?
(A) 15 (B) 16 **(C) 17** (D) 18 (E) 19

Die kleinste natürliche Zahl ist 4, die größte 20. Daher Lösung **(C)**: 17

2. Welches der Verkehrsschilder hat die meisten Symmetrieachsen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

 Schild (A) hat vier Symmetrieachsen. Daher Lösung **(A)**



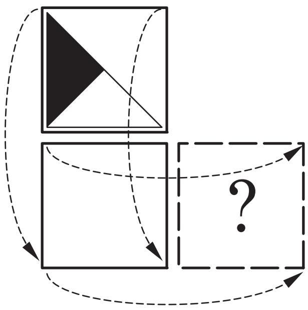
3. Wie lautet die Summe der beiden markierten Winkel?
(A) 150° (B) 180° **(C) 270°** (D) 320° (E) 360°

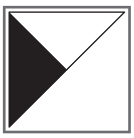
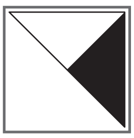
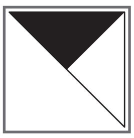
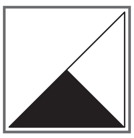
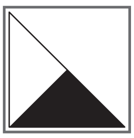
Die Summe der beiden spitzen Winkel beträgt 90°. Die Summe der markierten Winkel ist daher $180° + 180° - 90° = 270°$. Daher Lösung **(C)**.

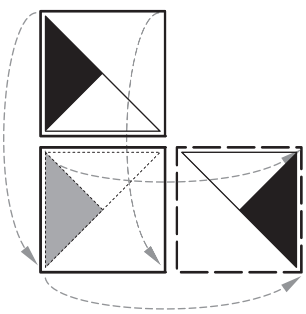
4. Jim sollte 26 zu einer bestimmten Zahl addieren. Stattdessen subtrahierte er 26 und erhielt -14.
Welches Ergebnis hätte er erhalten, wenn er 26 addiert hätte?
(A) 28 (B) 32 (C) 36 **(D) 38** (E) 42

Die Zahl, von welcher Jim 26 subtrahiert, muss 12 sein. Daher Lösung **(D)**.

5. Eine Karte ist auf einer Seite mit einer Figur bedruckt und auf der Rückseite weiß**.**
Die Karte wird zuerst nach unten und dann nach rechts geklappt (siehe Bild).
Welches Bild erhält man?



(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

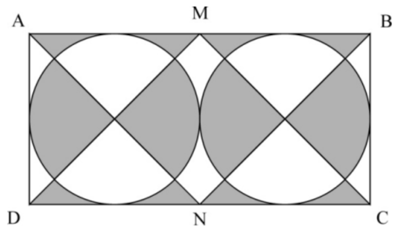
Die Grafik erklärt den Vorgang:  Daher Lösung **(B)**.

6. Von Annas Schule fahren 45 Lehrer, das sind 60 % aller Lehrer, mit dem Rad zur Schule. Nur 12 % der Lehrer fahren mit dem Auto zur Schule. Wie viele Lehrer von Annas Schule fahren mit dem Auto zur Schule?
(A) 4 (B) 6 **(C) 9** (D) 10 (E) 12

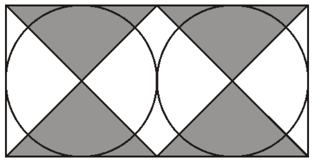
Lösung 1: 12% ist ein Fünftel von 60%. Die gesuchte Lehrerzahl ist daher $45 : 5 = 9$. Daher Lösung **(C)**.
Lösung 2: 20% sind 15 Lehrer und deshalb 100% 75 Lehrer. Daher 1% 0,75 Lehrer und 12 % $0{,}75 \cdot 12 = 9$.

7. Renate legt 555 kleine Haufen zu je 9 Steinen auf einen einzigen großen Haufen. Danach teilt sie diesen in Gruppen zu je 5 Steinen auf. Wie viele solche Gruppen erhält Renate?
(A) 999 (B) 900 (C) 555 (D) 111 (E) 45

Es gibt insgesamt $555 \cdot 9 = 5 \cdot 111 \cdot 9 = 5 \cdot 999$ Steine. Daher Lösung **(A)**.



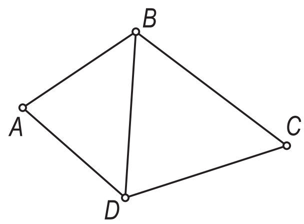
8. Im Rechteck ABCD ist die Seite AD 10 cm lang. M und N sind die Mittelpunkte der Seiten AB und CD. Wie groß ist die graue Fläche?
(A) 50 cm^2 (B) 80 cm^2 **(C) 100 cm^2** (D) 120 cm^2 (E) 150 cm^2



Offensichtlich setzt sich das Rechteck ABCD aus zwei Quadraten mit Seitenlängen 10 cm zusammen. Durch Verdrehen der Viertelkreissektoren erhält man eine neue Figur mit 4 grauen Viertelquadraten der Seitenlänge 10 cm, also insgesamt ein ganzes Quadrat. Daher Lösung **(C)**.

9. Alex hat ein 1 m langes und ein 2 m langes Seil. Er zerschneidet beide Seile so, dass alle Stücke gleich lang sind. Welche der folgenden Stückzahlen kann er dadurch nicht erhalten?
(A) 6 **(B) 8** (C) 9 (D) 12 (E) 15

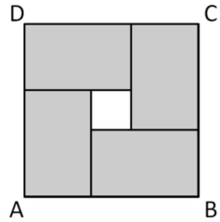
Zerschneidet man das 1 m lange Seilstück in beliebig viele gleich lange Stücke, so erhält man insgesamt, wenn man auch das 2 m Seil in Stücke derselben Länge zerschneidet, dreimal so viele Stücke, wie man durch Zerschneiden des 1 m Seiles erhalten hat. 8 ist aber nicht durch 3 teilbar und kann daher nicht die Gesamtzahl der Stücke sein. Daher Antwort **(B)**.



10. Bei einem Radrennen mit Start in D und Ziel in B wird jede der in der Zeichnung dargestellten Verbindungsstraßen (zwischen den Städten A, B, C und D) genau einmal befahren. Wie viele mögliche Routen gibt es für das Rennen?
(A) 10 (B) 8 **(C) 6** (D) 4 (E) 2

Die möglichen Routen: DBADCB, DBCDAB, DCBDAB, DABDCB, DCBADB, DABCDB.
Daher Lösung **(C)**.

4 Punkte Beispiele



11. Innerhalb des Quadrats ABCD liegen vier identische Rechtecke (siehe Bild).
Der Umfang jedes Rechtecks beträgt 16 cm. Welchen Umfang hat dieses Quadrat?
(A) 16 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm **(E) 32 cm**

Sei x die Länge und y die Breite eines dieser Rechtecke. Dann gilt: $2x + 2y = 16$ bzw. $x + y = 8$. Man sieht in der Zeichnung, dass sich die Seitenlänge des Quadrates aus $x + y$ zusammensetzt. Daher $4 \cdot 8 = 32$ cm der Umfang dieses Quadrates. Lösung **(E)**.

12. Petra hat 49 blaue und eine rote Perle. Wie viele der blauen Perlen muss Petra entfernen, damit 90 % der Perlen blau sind?
(A) 4 (B) 10 (C) 29 (D) 39 **(E) 40**

1 rote Perle muss dann 10% entsprechen und deshalb 9 blaue Perlen 90%. $49 - 40 = 9$. Lösung **(E)**

13. Welche der folgenden Bruchzahlen liegt am nächsten zu $\frac{1}{2}$?
(A) $\frac{25}{79}$ (B) $\frac{27}{59}$ **(C)** $\frac{29}{57}$ (D) $\frac{52}{79}$ (E) $\frac{57}{92}$

In (C) ist der Zähler ungefähr halb so groß wie der Nenner ($2 \cdot 29 = 58$). Die Abweichung von $\frac{1}{2}$ beträgt $\frac{1}{114}$ In allen anderen Fällen ist die Abweichung deutlich größer. Lösung **(C)**

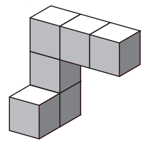
14. Igor schreibt alle Ergebnisse der Viertel- und Halbfinalspiele und des Finales eines Tennis-Wettbewerbs auf.
Die Ergebnisse sind in beliebiger Reihenfolge angeführt.

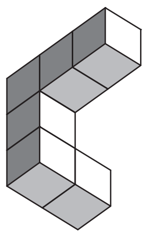
Bert besiegte Anton, Carl besiegte Damien, Glen besiegte Henry, Glen besiegte Carl,
Carl besiegte Bert, Edon besiegte Fred, Glen besiegte Edon.

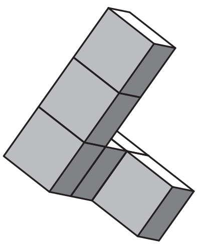
Wer bestritt das Finale?
(A) Glen und Henry **(B) Glen und Carl** (C) Carl und Bert (D) Glen und Edon (E) Carl und Damien

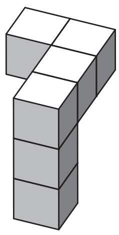
Zwei Spieler haben dreimal gespielt und haben somit das Finale bestreiten. Das sind Glen und Carl. Lösung **(B)**

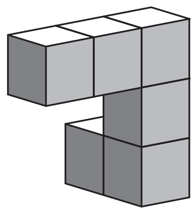
15. Anne hat einige Würfel zusammengeklebt und erhält den rechts zu sehenden Körper. Sie dreht ihn, um ihn von verschiedenen Seiten zu betrachten. Welche Ansicht kann sie nicht erhalten?

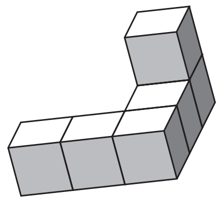



(A)


(B)


(C)


(D)

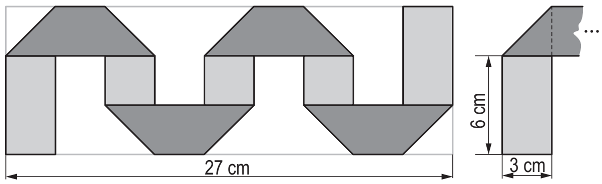

(E)

Lösung **(A)**.

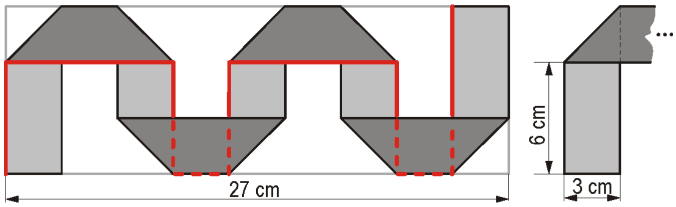
16. Tim, Tom und Jim sind Drillinge. Ihre Zwillingsbrüder John und James sind 3 Jahre jünger. Alle fünf feiern heute ihren Geburtstag. Welche der folgenden Zahlen könnte die Summe der Alter der fünf Brüder ergeben?
(A) 92 **(B) 89** (C) 76 (D) 53 (E) 36

Wenn die Drillinge x Jahre alt sind, dann sind die Zwillinge $(x - 3)$ Jahre alt.
Damit beträgt die Summe $A = 3x + (x - 3)\cdot 2$
Durch Umformen erhält man $A = 5x - 6$. Das bedeutet, dass $A + 6 = 5x$ und somit durch 5 teilbar sein muss. Dies ist aber nur bei Antwort (B) der Fall: $89 + 6 = 95$. Daher Lösung **(B)**.

17. Ein 3 cm breiter Papierstreifen ist auf einer Seite dunkel, auf der anderen hell. Der gefaltete Papierstreifen liegt exakt innerhalb eines Rechtecks mit der Länge 27 cm und der Breite 9 cm (siehe Zeichnung). Wie lang ist der Papierstreifen?
(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 54 cm **(D) 57 cm** (E) 81 cm



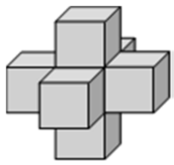
Betrachten wir den Verlauf eines der beiden Papierstreifenränder. Man sieht, dass es dann $27-3=24$ cm waagrecht verlaufende Kantenstrecken und $4\cdot 6+9=33$ cm senkrecht verlaufende Kantenstrecken gibt. Macht zusammen 57 cm. Lösung **(D)**



18. Die beiden Kängurus Jump und Hop springen gleichzeitig von der gleichen Startlinie in die gleiche Richtung. Pro Sekunde springt jeder der beiden genau einmal. Jump springt immer 6 m weit. Hop springt zuerst 1 m, dann 2 m, dann 3 m etc. Nach wie vielen Sprüngen wird Jump von Hop eingeholt?
(A) 10 **(B) 11** (C) 12 (D) 13 (E) 14

Lösung 1: Durch Ausprobieren. Nach 11 Sprüngen haben beide 66 m zurückgelegt.
Lösung 2: Im 1. Sprung springt Jump um 5 m weiter, im zweiten 4 m weiter usw. und im 6. Sprung springen beide gleich weit. Im 7. Sprung verliert Jump einen Meter auf Hop, im 8. 2 m usw. bis schließlich im 11. Sprung der ganze Vorsprung vom Anfang verloren gegangen ist. Lösung **(B)**

19. Sieben identische Spielwürfel (mit jeweils 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten auf den Flächen) werden zum rechts skizzierten Körper zusammengeklebt. Auf zusammengeklebten Flächen sind jeweils gleich viele Punkte. Wie viele Punkte kann man auf der Oberfläche des Körpers sehen?
(A) 24 (B) 90 (C) 95 **(D) 105** (E) 126



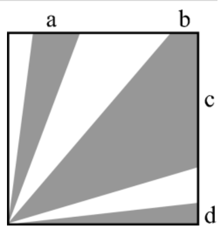
Auf jedem Würfel liegen 21 Punkte. Damit sieht man einerseits die 21 Punkte des innenliegenden Würfels nicht und aufgrund der Voraussetzung auch weitere 21 Punkte der angeklebten Würfelflächen nicht.
Daher: $7\cdot 21-2\cdot 21=5\cdot 21=105$. Lösung **(D)**

20. In einer Klasse befinden sich 20 Mädchen und Buben. Sie sitzen an Zweiertischen so, dass ein Drittel der Buben mit einem Mädchen den Tisch teilt, und die Hälfte der Mädchen mit einem Buben den Tisch teilt.
Wie viele Buben gibt es in der Klasse?
(A) 9 **(B) 12** (C) 15 (D) 16 (E) 18

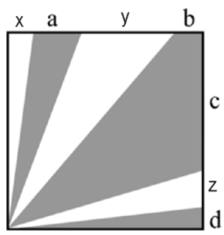
Lösung 1: b sei die Anzahl der Buben und m die Anzahl der Mädchen. Laut Angabe muss gelten $\frac{b}{3}=\frac{m}{2}$ Die gesuchte Lösungszahl muss also gerade und durch 3 teilbar sein. Dies erfüllen die Lösungszahlen 12 und 18. Durch Probieren ergibt sich 12. ($12:3=4$, d.h. 4 ist die Anzahl der Hälfte der Mädchen $\Rightarrow m=8$. $12+8=20$) Lösung **(B)**
Lösung 2: Lösen des Gleichungssystems I: $m+b=20$, II: $\frac{b}{3}=\frac{m}{2}$

5 Punkte Beispiele

21. In einem Quadrat mit dem Flächeninhalt 36 befinden sich, wie in der Abbildung zu sehen, graue Flächen. Die Summe der Flächeninhalte aller grauen Flächen beträgt 27.
Wie lang sind die Strecken a, b, c und d zusammen?
(A) 4 (B) 6 (C) 8 **(D) 9** (E) 10



Die Seitenlänge des Quadrates beträgt 6. Seien x, y, z die Grundlinien der weißen Dreiecke. Die Fläche eines solchen Dreiecks ist dann z.B. $A_x=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 6$ usw. Die Summe der Flächen dieser Dreiecke beträgt 9. Damit gilt: $A_{weiß}=9$. Es gilt $\frac{1}{2}(x+y+z)\cdot 6=9 \Leftrightarrow (x+y+z)=3$.
Aus der Zeichnung sieht man: $a+b+c+d=2\cdot 6-(x+y+z) \Leftrightarrow a+b+c+d=12-3=9$
Lösung: **(D)**



22. Theos Uhr geht 10 Minuten nach, er aber glaubt, dass sie 5 Minuten vorgeht.
Leos Uhr geht 5 Minuten vor, er aber glaubt, dass sie 10 Minuten nachgeht.
Beide sehen gleichzeitig auf ihre eigene Uhr. Theo glaubt es ist 12:00 Uhr. Welche Uhrzeit vermutet Leo?
(A) 11:30 (B) 11:45 (C) 12:00 **(D) 12:30** (E) 12:45

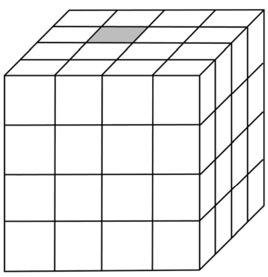
Auf Theos Uhr ist es 12:05, und da sie 10 Minuten nachgeht ist es in Wirklichkeit 12:15. Leos Uhr zeigt zu dem Zeitpunkt 12:20 (sie geht 5 Minuten vor) und daher denkt Leo es ist 12:30, weil er glaubt, dass die Uhr 10 Minuten hinten ist. Lösung: **(D)**

23. Zwölf Mädchen trafen sich in einer Konditorei. Im Durchschnitt aßen sie 1,5 Muffins. Keine von ihnen aß mehr als zwei Muffins und zwei aßen nichts. Wie viele Mädchen aßen zwei Muffins?
(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 7 **(E) 8**

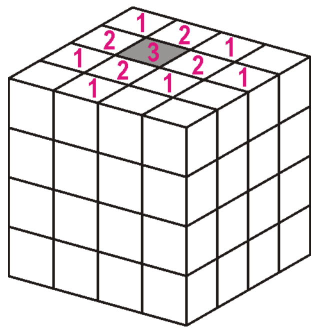
Insgesamt wurden 18 Muffins von 10 Mädchen gegessen. Die drei rechnerischen Muffins von den beiden Mädchen, die nichts aßen, verteilen sich je zur Hälfte auf 6 Mädchen, die nun je 2 Muffins gegessen haben müssen. Nun muss man aber bedenken, dass nur ganze Muffins bestellbar sind. Damit ist es nun natürlich nicht möglich, dass die verbleibenden 4 Mädchen je 1,5 Muffins bestellt haben können. Die Aufteilung kann nur 2, 2, 1, 1 gewesen sein, d.h. zwei weitere Mädchen haben ebenfalls 2 Muffins gegessen. Damit gab es insgesamt 8 Mädchen mit je 2 Muffins. Daher ist die Lösung **(E)**.

24. Rotkäppchen bringt drei Großmüttern Waffeln. Zu Beginn ist ihr Korb vollgefüllt. Kurz bevor sie jeweils die Häuser der Großmütter erreicht, frisst der böse Wolf jeweils die Hälfte der im Korb befindlichen Waffeln. Als sie das Haus der dritten Großmutter verlässt, ist ihr Korb leer. Jede Großmutter bekommt gleich viele Waffeln.
Durch welche der folgenden Zahlen kann die ursprüngliche Anzahl der Waffeln sicher geteilt werden?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D) 7** (E) 9

Das Problem löst man am besten von hinten. Die dritte Großmutter bekommt W Waffeln. Da der Wolf zuvor die Hälfte der Waffeln also W Waffeln gefressen haben muss, waren zuvor $2 \cdot W$ Waffeln im Korb. Die zweite Großmutter bekam ebenfalls W Waffeln. Damit befanden sich zu diesem Zeitpunkt noch $2 \cdot W + W = 3 \cdot W$ Waffeln in Korb. Kurz zuvor hat der Wolf die Hälfte d.h. $3 \cdot W$ Waffeln gefressen. Als Rotkäppchen auch der ersten Großmutter W Waffeln schenkte, waren in diesem Augenblick $6 \cdot W + W$ Waffeln im Korb. Zuvor hatte der Wolf aber die Hälfte nämlich $7 \cdot W$ Waffeln gefressen. Zu Beginn waren also $7 \cdot W + 7 \cdot W = 14 \cdot W$ Waffeln im Korb. Die einzige Zahl der Lösungen, die 14 teilt ist 7. Daher Lösung **(D)**.



25. Ein großer Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln. Genau einer dieser Würfel ist grau (siehe Zeichnung). Zwei Würfel sind Nachbarn, wenn sie eine gemeinsame Fläche besitzen.
Am ersten Tag färbt der graue Würfel alle seine Nachbarwürfel grau.
Am nächsten Tag färben alle grauen Würfel wieder ihre Nachbarwürfel grau.
Wie viele der 64 kleinen Würfel sind am Ende des zweiten Tages grau?
(A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 16 **(E) 17**

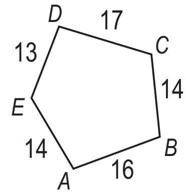


Die Zahlen auf dem Würfel geben an, wie viele grau gefärbte Würfel übereinanderliegen müssen.
Die Summe ist 17. Daher Lösung **(E)**.

26. Auf der Tafel stehen natürliche Zahlen, von denen keine zwei gleich sind. Das Produkt der beiden kleinsten beträgt 16, das Produkt der beiden größten 225. Wie lautet die Summe aller Zahlen, die auf der Tafel stehen?
(A) 38 (B) 42 **(C) 44** (D) 58 (E) 243

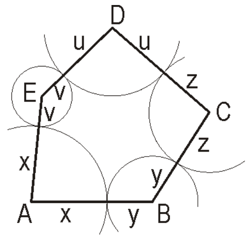
16 ist das Produkt von (1, 16) oder (2, 8). 225 ist das Produkt von (1, 225), (3, 75), (5, 45) oder (9, 25).
(1, 16) kommt nicht in Frage, da 16 das Produkt der beiden kleinsten Zahlen sein muss. Daher $16 = 2 \cdot 8$.
Damit bleibt aber auch nur mehr $9 \cdot 25 = 225$ als Produkt der beiden größten Zahlen über. Weitere Zahlen können nicht auf der Tafel stehen. Die Zahlen lauten: 2, 8, 9, 25. Die Summe beträgt 44. Lösung **(C)**

27. In der folgenden Zeichnung ist ein Fünfeck mit den zugehörigen Seitenlängen gegeben. Fünf Kreise mit den Mittelpunkten A, B, C, D und E werden gezeichnet. Auf jeder Seite des Fünfecks berühren sich die beiden Kreise um die Endpunkte dieser Seite.
Welcher Punkt ist der Mittelpunkt des größten Kreises?



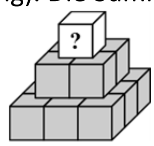
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Zeichnet man die Kreise mit den Radien x, y, z, u, v ein, so zerfällt der Streckenzug ABCDEA in 10 Teilstücke, wobei jeweils zwei Teilstücke gleich lang sind.



Es gilt $2x + 2y + 2z + 2u + 2v = 74$ und daher I: $x + y + z + u + v = 37$.
Andererseits ergeben sich auch die Summen $x + y = 16$, $y + z = 14$, $z + u = 17$, $u + v = 13$ und $x + v = 14$.
Nun kann man z.B. in Gleichung I $x + y$ durch 16 und $z + u$ durch 17 ersetzen. Damit ergibt sich die neue Gleichung $16 + 17 + v = 37$. Daraus errechnet man $v = 4$.
Sofort erhält man aus $x + v = 14$ den Wert $x = 10$ und analog aus $u + v = 13$ den Wert $u = 9$.
Analog erhält man auch die Werte $y = 6$ und $z = 8$.
$x = 10$ ist also der größte Kreisradius. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist A. Lösung **(A)**.

28. Susi schreibt auf jeden der 14 Würfel der Pyramide eine andere positive ganze Zahl (siehe Zeichnung). Die Summe der Zahlen, die sie auf die neun am Boden liegenden Würfeln schreibt, beträgt 50. Die Zahl auf jedem anderen Würfel ist gleich der Summe der Zahlen auf jenen vier Würfeln, die darunter liegen. Wie lautet die größte Zahl, die man auf den obersten Würfel schreiben kann?



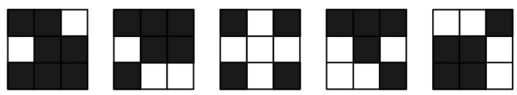
(A) 112 (B) 110 (C) 50 (D) 120 **(E) 118**

Die in der Mitte liegende Zahl kommt 4-mal ins Spiel und muss daher möglichst groß sein. Wenn die anderen 8 Würfel die Zahlen 1 bis 8 tragen (Summe 36), dann kann in der Mitte 14 stehen. Weiteres nimmt man die Zahlen 5, 6, 7, 8 nicht als Eckzahlen an. Diese Zahlen kommen dann zweimal ins Spiel. Somit ergibt sich als Summe:
$4 \cdot 14 + 2 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) + 1 + 2 + 3 + 4 = 56 + 52 + 10 = 118$. Lösung **(E)**

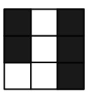
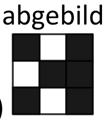
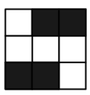
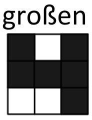
29. In jedem der fünf Waggons eines Zuges sitzt mindestens ein Passagier. Zwei Passagiere heißen *benachbart*, wenn sie entweder im gleichen Waggon oder in zwei aufeinanderfolgenden Waggons sitzen. Jeder Passagier hat entweder genau 5 oder genau 10 Nachbarn. Wie viele Passagiere befinden sich im Zug?
(A) 13 (B) 15 **(C) 17** (D) 20 (E) Diese Situation ist nicht möglich.

Eine mögliche Belegung des Zuges: Waggon $W_1 = 1P$. $W_2 = 5P$. Damit hat der Passagier aus W_1 5 Nachbarn in W_2.
In W_3 sitzen 5P. Damit hat jeder Passagier aus W_2 einen Passagier aus W_1, 4 Passagiere aus W_2 und 5 Passagiere aus W_3, d.h. 10 Passagiere als Nachbarn.
In W_4 sitzt ein Passagier. Damit haben die Passagiere aus W_3 fünf Nachbarn in W_2, vier in W_3 und einen in W_4, macht zusammen 10 Nachbarn.
In W_5 sitzen 5 Passagiere. Damit hat der Passagier aus W_4 jeweils 5 Nachbarn in W_3 und W_5 also 10 Nachbarn.
Die Passagiere in W_5 haben vier Nachbarn im eigenen Waggon und einen in W_4 also 5 Nachbarn.
$1 + 5 + 5 + 1 + 5 = 17$. Lösung **(C)**

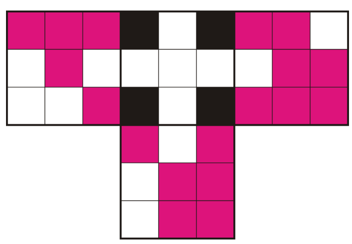
30. Ein Würfel mit der Kantenlänge 3 besteht aus 15 schwarzen und 12 weißen Einheitswürfeln. In der folgenden Abbildung kann man fünf der sechs Seitenflächen des großen Würfels sehen.



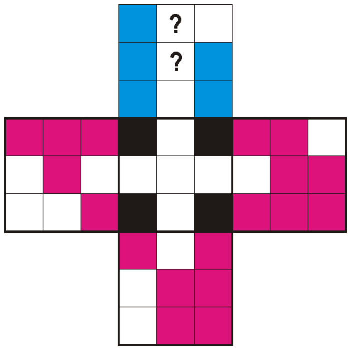
Welche der unten abgebildeten Flächen ist die 6. Seitenfläche des großen Würfels?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Das Netz lässt sich wie folgt bilden.
An die dritte gegebene Seitenfläche lassen sich sofort die Seitenflächen 1, 2 und 4 hängen, wie in der folgenden Abbildung zu sehen. Seitenfläche 5 liegt gegenüber von Seitenfläche 3.



Aus dem bis jetzt konstruierten Netz muss die gesuchte Seitenfläche wie in der folgenden Abbildung aussehen. Fraglich sind das Feld in der Mitte und das darüber liegende Feld.



Wir haben derzeit $3 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 11$ am Rand liegende gefärbte Würfel und 4 in der Mitte liegende gefärbte Würfel (Seitenfläche 5 nicht vergessen), also insgesamt 15 gefärbte Würfel. Das ist die geforderte Gesamtzahl an gefärbten Würfeln. Damit sind alle anderen noch nicht bestimmten Würfel weiß.
In der von uns konstruierten Seitenfläche sind keine weiteren Quadrate mehr zu färben. Sie entspricht Antwort A. Lösung **(A)**