Känguru 2015 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Andrea ist irgendwann zwischen 01.01.1997 und 31.12.1997 geboren, Charlotte irgendwann zwischen 01.01.2001 und 31.12.2001.

   Wenn ihre Alter (und somit ihre Geburtsdaten) möglichst nahe beisammen sein sollen, dann muss Andrea ganz spät im Jahr 1997 (also am 31.12.1997) und Charlotte ganz früh im Jahr 2001 (also am 01.01.2001) geboren sein. Näher beisammen ist nicht möglich, also liegen ihre Geburten um mindestens 3 Jahre und 1 Tag auseinander.

   Wenn ihre Alter umgekehrt ganz weit auseinander sein sollen, dann muss Andrea ganz früh im Jahr 1997 (also am 01.01.1997) und Charlotte ganz spät im Jahr 2001 (also am 31.12.2001) geboren sein. Weiter auseinander ist nicht möglich, also sind ihre Geburten um höchstens 5 Jahre minus 1 Tag voneinander entfernt.

   Jeder Altersunterschied dazwischen ist möglich (indem wir vom ganz kleinen Unterschied ausgehen, dann zuerst Charlottes Geburtstag im Jahr 2001 immer wieder um 1 Tag nach hinten verschieben bis wir den 31.12. erreicht haben, und danach Andreas Geburtstag im Jahr 1997 immer wieder um einen Tag vorverlegen bis wir beim 01.01. ankommen).

   Für die vier Aussagen ergibt das:

   (A) "weniger als 4 Jahre"
   $\longrightarrow$ Falsch, da auch mehr als 4 Jahre möglich sind, zB 5 Jahre minus 1 Tag.

   (B) "mindestens 4 Jahre"
   $\longrightarrow$ Falsch, da auch weniger als 4 Jahre möglich sind, zB 3 Jahre plus 1 Tag.

   (C) "genau 4 Jahre"
   $\longrightarrow$ Falsch, da auch andere Werte möglich sind, zB 3 Jahre plus 1 Tag.

   (D) "mehr als 4 Jahre"
   $\longrightarrow$ Falsch, da auch weniger als 4 Jahre möglich sind, zB 3 Jahre plus 1 Tag.

   (E) "nicht weniger als 3 Jahre"
   $\longrightarrow$ Richtig, da wir gezeigt haben, dass ihre Geburten sicher mindestens 3 Jahre und 1 Tag voneinander entfernt sind.

2. Entweder wir erkennen, dass $(-x)^3 = -(x^3)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Daher gilt (wenn man $x = a - b$ setzt) auch $(b-a)^3 = (-(a-b))^3 = -((a-b)^3)$ und somit sehen wir sofort, dass $(a-b)^3 + (b-a)^3 = (a-b)^3 - (a-b)^3 = 0$ gilt.

   Oder wir rechnen es einfach aus:

   $$(a-b)^3 + (b-a)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3 = 0$$

3. Die Rechenregeln für Potenzen besagen, dass $2^{2x} = \left(2^2\right)^x = 4^x$. Also suchen wir alle x, für die $4^x = 4^{x+1}$ gilt. Weiters wissen wir, dass $4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4^x \cdot 4 = 4 \cdot 4^x$, also suchen wir alle x mit $4^x = 4 \cdot 4^x$. Das kann offensichtlich nur funktionieren, wenn $4^x = 0$ gilt (da der Wert auf der rechten Seite das Vierfache von jenem auf der linken Seite ist und somit nur gleich sein kann, wenn beide Werte gleich 0 sind). Da aber 4^x bekanntlich nie 0 werden kann, gibt es keine Lösungen.

4. Die schwarze Säule ist am kleinsten, also muss auch das schwarze Tortenstück am kleinsten sein. Das schließt Diagramm (D) aus, weil dort dunkelgrau das kleinste Tortenstück ist.

   Die weiße Säule ist höher als die dunkelgraue. In (B) sind aber das weiße und das dunkelgraue Tortenstück genau gleich groß, also ist auch (B) falsch.

   Die hellgraue Säule ist höher als die weiße. In (C) sind aber das weiße und das dunkelgraue Tortenstück genau gleich groß, also ist auch (C) falsch.

   Die schwarze, weiße und dunkelgraue Säule sind zusammen höher als die hellgraue, also muss das hellgraue Tortenstück weniger als die Hälfte der Torte ausmachen. Das schließt (E) aus.

   In Torte (A) scheinen die Verhältnisse der Tortenstücke ungefähr den Säulenhöhen zu entsprechen mit schwarz < dunkelgrau < weiß < hellgrau. Also ist (A) die einzige von den 5 Torten, die als Lösung in Frage kommt.

5. Die angegebene Berechnung beschreibt das arithmetische Mittel der Zahlen von 2001 bis 2031. Die Zahl genau in der Mitte ist 2016, also ist dies die Lösung.

   Falls wir das arithmetische Mittel nicht erkennen, können wir es auch einfach ausrechnen (und machen uns dabei mit einigen Tricks das Leben leichter):

$$\begin{aligned}
2001 + 2002 + \cdots + 2031 &= 2000 + 1 + 2000 + 2 + \cdots + 2000 + 31 \\
&= 2000 + 2000 + \cdots + 2000 + 1 + 2 + \cdots + 31 \\
&= 31 \cdot 2000 + \frac{31 \cdot (31+1)}{2} \\
\frac{2001 + 2002 + \cdots + 2031}{31} &= \frac{31 \cdot 2000 + \frac{31\cdot(31+1)}{2}}{31} \\
&= \frac{31 \cdot 2000}{31} + \frac{\frac{31\cdot(31+1)}{2}}{31} \\
&= 2000 + \frac{31+1}{2} \\
&= 2016
\end{aligned}$$

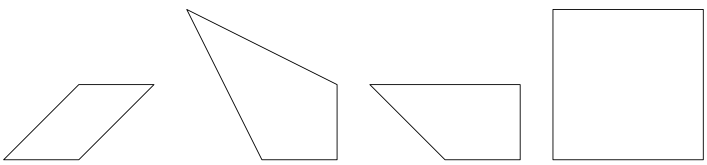
6. Wir wissen, dass eine Figur genau dann mit einer solchen durchgehenden Linie gezeichnet werden kann, wenn sie höchstens 2 Knoten hat, in denen eine ungerade Anzahl von Strichen zusammenstößt. (Grobe Beweisidee: Wenn ein Knoten eine gerade Anzahl von Strichen hat, kann ich ihn genau gleich oft betreten und wieder verlassen. Bei einer ungeraden Anzahl muss ich aber meine gesamte Runde entweder dort beginnen oder beenden. Da die gesamte Runde nur einen Anfang und nur ein Ende hat, kann ich also höchstens zwei Knoten mit ungerader Anzahl damit "ausgleichen".)

   In unseren Figuren ist jede Kreuzung zwischen einem Kreis und der eingezeichneten geraden Linie ein Knoten, und ebenso das linke und rechte Ende der geraden Linie (und es gibt keine weiteren Knoten).

   - In der ersten Figur haben wir 2 Knoten mit je 4 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es möglich.
   - In der zweiten Figur haben wir 2 Knoten mit je 3 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es nicht möglich (da wir mehr als 2 Knoten mit ungerader Anzahl haben).
   - In der dritten Figur haben wir 4 Knoten mit je 4 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es möglich.
   - In der dritten Figur haben wir 6 Knoten mit je 4 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es möglich.

   Insgesamt ist es also bei 3 der 4 Figuren möglich.

7. Für 0, 1, 2 und 4 rechte Winkel finden wir rasch Beispiele:



   Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°. Wenn drei der Winkel rechte Winkel sind, ergibt sich für den vierten Winkel δ also $\delta = 360° - 3 \cdot 90° = 90°$. Also ist es nicht möglich ein Viereck mit genau 3 rechten Winkeln zu zeichnen, da der vierte automatisch ebenfalls ein rechter Winkel wäre.

8. Würde man einen ganzen Kegel umwickeln, hätte das dafür benötigte Papier die Form eines Kreissektors ("Tortenstück"). Davon entfernen wir nun einen Teil, um aus dem Kegel einen Kegelstumpf zu machen. Auch der entfernte Teil hat wieder die Form eines Kegels, also entfernen wir von dem ausgeschnittenen Papier wiederum ein Stück in Form eines Kreissektors, und zwar jenen Teil, der näher bei der Spitze des Tortenstückes ist. Nur (E) hat die so beschriebene Form.

9. Die Fläche eines Halbkreises beträgt $A = \frac{1}{2} r^2 \pi$, wobei r der Radius des Halbkreises ist. Will man umgekehrt den Radius aus der Fläche berechnen, so formt man dies um zu $r = \sqrt{\frac{2A}{\pi}} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Bezeichne x, y und z die drei Seitenlängen des Dreiecks. Jede dieser Seitenlängen entspricht dem doppelten Radius (= Durchmesser) des Halbkreises darüber, also betragen die Seitenlängen gemäß der obigen Rechnung $x = \sqrt{X} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2$, $y = \sqrt{Y} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2$ und $z = \sqrt{Z} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2$.

Da das Dreieck rechtwinkelig ist, gilt gemäß des Satzes von Pythagoras, dass $x^2 + y^2 = z^2$. Nun setzen wir ein:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 = z^2 \\
\iff \quad & X \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 4 + Y \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 4 = Z \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 4 \qquad \Big| : \frac{2}{\pi} \cdot 4 \\
\iff \quad & X + Y = Z
\end{aligned}
$$

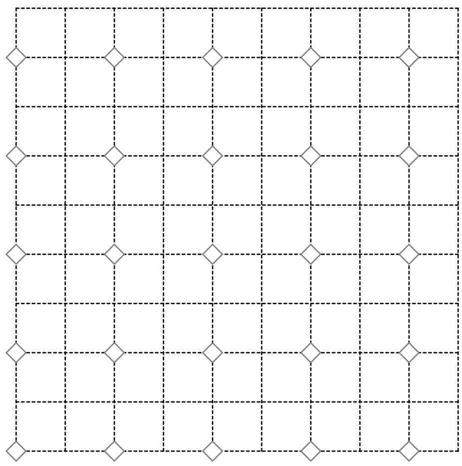
Es gilt also immer $X + Y = Z$.

(Hinweis: Je nach Wahl der Flächen können in manchen Situationen auch weitere der Lösungsmöglichkeiten zutreffen. $X + Y = Z$ ist aber die einzige, die für *jede* Kombination von Halbkreisflächen sicher gilt.)

10. Ganz egal, wie man faltet, liegt am Ende jede der strichlierten Linien genau auf der um 2 Felder entfernten Parallelen dazu (bzw. darunter). Diese beiden Linien sind also genau an den gleichen Stellen zerschnitten bzw. nicht zerschnitten. Das heißt: Wenn man von einem beliebigen Eckpunkt um 2 Felder in gerader Richtung fährt, so sind Start und Ziel entweder beide bei einem Loch oder beide an einer unzerschnittenen Stelle.

Daraus folgt: Wenn wir das Lochmuster von einem Bereich von 2×2 Ecken kennen, so kennen wir das Muster des gesamten Blattes (da es um jeweils 2 Felder daneben bzw. darunter bzw. darüber immer wieder exakt kopiert wird).

Im abgebildeten gefalteten Zustand sehen wir aber genau so einen Bereich von 2×2 Ecken und sehen, dass genau eine dieser Ecken ein Loch hat. Das gesamte Muster sieht daher etwa so aus:



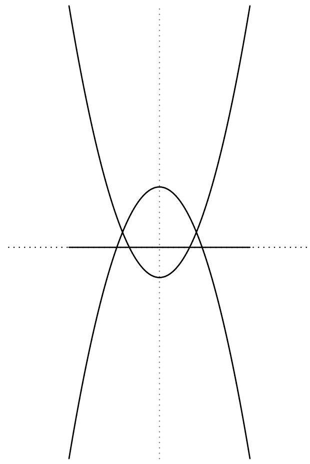
Ganz egal, wie man dieses Muster auf das gegebene 3×3 Blatt anwendet, es liegt auf jeden Fall genau ein Loch im Inneren.

(Hinweis: Konkret für das 3×3 Blatt geht es auch einfacher, indem man sagt, dass jedes kleine Quadrat dem gefalteten ähnlich ist, also genau 1 Loch hat. Insbesondere gilt das für das mittlere Quadrat, also ist von den 4 inneren Eckpunkten genau eines ein Loch. Die oben angegebene Methode funktioniert allerdings auch für beliebig große Papierblätter.)

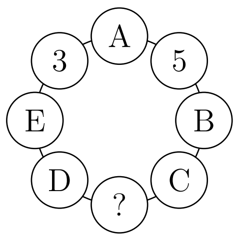
11.

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)} \\
= & \sqrt{(2 \cdot 2015) + (0) + (2015^2) + (1)} \\
= & \sqrt{2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1} \\
= & \sqrt{(2015 + 1)^2} \\
= & 2016
\end{aligned}
$$

12. Wir zeichnen den Graph und zählen 10 Regionen:



13. Wir bezeichnen die Felder wie in dieser Abbildung:



Nun wenden wir mehrere Male die Regel an, dass jede Zahl gleich der Summe ihrer Nachbarn sein muss:

- A als Mittelpunkt: $A = 3 + 5 = 8$
- 5 als Mittelpunkt: $5 = A + B = 8 + B$, also $B = 5 - 8 = -3$
- B als Mittelpunkt: $B = 5 + C = -3$, also $C = -3 - 5 = -8$
- C als Mittelpunkt: $C = B+?$, also $-8 = -3+?$, also $? = -8 + 3 = -5$
- 3 als Mittelpunkt: $3 = A + E = 8 + E$, also $E = 3 - 8 = -5$
- E als Mittelpunkt: $E = 3 + D = -5$, also $D = -5 - 3 = -8$
- D als Mittelpunkt: $D = E+?$, also $-8 = -5+?$, also $? = -8 + 5 = -3$

Von A ausgehend einmal im und einmal gegen den Uhrzeigersinn weiter eingesetzt erhalten wir also verschiedene Werte für ?. Deshalb gibt es keine gültige Lösung.

14. Wir machen folgende Beobachtungen:

- Aus $b = c : e$ folgt $b < c$, da c offensichtlich das e-Fache von b ist, und $e \geq 1$ gilt. $e = 1$ kann nicht gelten, da sonst $b = c$ gelten würde, was in der Angabe ausgeschlossen wurde. Also ist $e \geq 2$ und somit $c = b \cdot e$ mindestens das Doppelte von b. Somit ist b sicher nicht die größte Zahl.
- Weiters folgt aus $b = c : e$, dass $c > e$ gilt, da das Ergebnis von $c : e$ gleich b ist und somit ganzzahlig sein muss. (Es kann nicht $c = e$ gelten, da das in der Angabe verboten ist.) Somit ist auch e sicher nicht die größte Zahl.
- Aus $d = a + b$ folgt $d > a$ und $d > b$, da a und b beide positiv sind und d als die Summe davon daher immer größer als jeder einzelne Summand. Somit kann weder a noch b die größte Zahl sein.
- Aus $a = e - d$ folgt $a < e$, da von e etwas abgezogen werden muss, um auf a zu kommen. Somit ist a sicher nicht die größte Zahl (was wir ja auch bereits davor schon ausgeschlossen hatten).
- Weiters folgt aus $a = e - d$, dass $e > d$, weil die Differenz gleich a ist und daher positiv sein muss. Somit ist d sicher nicht die größte Zahl.

Insgesamt haben wir also alle Zahlen bis auf c als größte Zahl ausgeschlossen.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch ein Beispiel an, das den gegebenen Bedingungen entspricht:
$a = 1$, $b = 3$, $c = 15$, $d = 4$, $e = 5$

15. Wir bezeichnen die 6 Zahlen mit a, b, c, x, y, z, mit $GM(a, b, c) = 3$ und $GM(x, y, z) = 12$ (wobei GM für das geometrische Mittel steht).

    Nun wollen wir $GM(a, b, c, x, y, z)$ berechnen und verwenden dabei einige der Rechenregeln für Wurzelzeichen:

$$\begin{aligned} GM(a,b,c,x,y,z) &= \sqrt[6]{abcxyz} \\ &= \sqrt[2]{\sqrt[3]{abcxyz}} \\ &= \sqrt[2]{\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{xyz}} \\ &= \sqrt[2]{GM(a,b,c) \cdot GM(x,y,z)} \\ &= \sqrt[2]{3 \cdot 12} \\ &= \sqrt[2]{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

16. Seien r_1, r_2 und r_3 die Radien des kleinen, mittleren und großen Kreises, in dieser Reihenfolge. Laut Angabe gilt $r_1 = 1$.

    Der Flächeninhalt A_1 der inneren grauen Fläche ist ein Viertel eines Kreises und wird daher mit $A_1 = r_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ berechnet.

    Der Flächeninhalt A_2 der mittleren grauen Fläche ist gleich der Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_2 minus die Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_1. (Man nimmt also zuerst einen großen Viertelkreis und schneidet dann den kleineren Viertelkreis innen wieder weg.) Also gilt $A_2 = r_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} - r_1^2 \cdot \frac{\pi}{4}$. Nun soll aber $A_1 = A_2$ gelten, also

$$\begin{aligned} & A_1 = A_2 & & \\ \iff\quad & r_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} = r_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} - r_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} & & \Big| \cdot \frac{4}{\pi} \\ \iff\quad & r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 & & \Big| + r_1^2 \\ \iff\quad & 2r_1^2 = r_2^2 & & \Big| r_1 = 1 \\ \iff\quad & 2 \cdot 1 = r_2^2 & & \Big| \sqrt{\ } \\ \implies\quad & r_2 = \sqrt{2} & & \end{aligned}$$

    Ganz ähnlich dazu ist der Flächeninhalt A_3 der äußeren grauen Fläche gleich der Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_3 minus die Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_2. Also gilt $A_3 = r_3^2 \cdot \frac{\pi}{4} - r_2^2 \cdot \frac{\pi}{4}$. Nun soll aber auch $A_1 = A_3$ gelten, also

$$\begin{aligned} & A_2 = A_3 & & \\ \iff\quad & r_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} = r_3^2 \cdot \frac{\pi}{4} - r_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} & & \Big| \cdot \frac{4}{\pi} \\ \iff\quad & r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 & & \Big| + r_2^2 \\ \iff\quad & r_1^2 + r_2^2 = r_3^2 & & \Big| r_1^2 = 1, r_2^2 = 2 \\ \iff\quad & 1 + 2 = r_3^2 & & \Big| \sqrt{\ } \\ \implies\quad & r_3 = \sqrt{3} & & \end{aligned}$$

    Für das Produkt gilt daher $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

17. Sei a die Einwohnerzahl von Arnberg vor 20 Jahren, und b jene von Berghausen vor 20 Jahren.

    Heute wohnen in den beiden Städten zusammen also $Z = a \cdot 1.4 + b \cdot 1.6$ Personen. Zusammen ist das laut

Angabe eine Steigerung um 54%, also gilt auch $Z = (a + b) \cdot 1.54$. Wir setzen das gleich und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
& (a+b)\cdot 1.54 = a\cdot 1.4 + b\cdot 1.6 && \big|\cdot 100 \\
\iff\ & 154a + 154b = 140a + 160b && \big| -140a - 154b \\
\iff\ & 14a = 6b && \big| : 14b \\
\iff\ & a : b = 6 : 14 = 3 : 7
\end{aligned}$$

Das ursprüngliche Verhältnis von a zu b war also $3 : 7$.

18. Wir machen die folgende Tabelle aller möglichen Ergebnisse und markieren diejenigen Fälle mit einem **X**, in denen Tina gewinnt:

		Tina					
		2	2	2	5	5	5
Bibi	1	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
	2				**X**	**X**	**X**
	3				**X**	**X**	**X**
	4				**X**	**X**	**X**
	5						
	6						

Tina gewinnt also in 15 von 36 Fällen, also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

19. Die niedrigste mögliche Ziffernsumme ist 1 (da jede Zahl zwischen 1 und 2015 mindestens eine Ziffer hat, die nicht 0 ist, und beispielsweise 100 tatsächlich die Ziffernsumme 1 hat).

Die höchste mögliche Ziffernsumme ist 28 und wird bei 1999 erreicht. Eine höhere Ziffernsumme ist nicht möglich, da sonst die Tausenderziffer mindestens 2 sein müsste. Für alle Zahlen von 2000 bis 2015 ist aber die Hunderterziffer gleich 0, also ist die Ziffernsumme sicher niedriger.

Jede Ziffernsumme dazwischen kann erreicht werden, indem wir bei 1000 beginnen, dann die Einerstelle schrittweise erhöhen bis 9 (also $1001, 1002, 1003, \ldots, 1009$), dann dasselbe mit der Zehnerstelle machen (also $1019, 1029, 1039, \ldots, 1099$), und zuletzt mit der Hunderterstelle (also $1199, 1299, 1399, \ldots, 1999$). Die Ziffernsumme wird dabei jeweils um 1 größer, also können wir alle Ziffernsummen von 1 bis 28 so konstruieren.

Somit gibt es 28 verschiedene Farben.

20. 4 und 6 sind nicht möglich, da diese bereits auf den anderen sichtbaren Flächen sind. Da die Summe gegenüberliegender Seiten gleich 7 ist, liegen 3 und 1 gegenüber davon, also auch nicht auf der gefragten Fläche.

Wir brauchen also nur noch 2 und 5 als Möglichkeiten betrachten. Nehmen wir an, auf der abgebildeten Fläche wären 2 Punkte. Da die Würfel identisch sind, sehen wir beim gedanklichen Drehen, dass dann 1 hinten und 3 unten liegen müsste. Das widerspricht aber der Reihenfolge von 4 und 6 auf den sichtbaren Seiten.

Mit 5 Punkten auf der hinteren Fläche können wir den Würfel dagegen so drehen, dass 1 unten und 3 hinten liegt.

Somit ist 5 die einzige Lösung.

21.
- Nehmen wir an, (A) wäre wahr. Dann müsste gemäß der Aussage von (A) auch (C) wahr sein. Damit müsste gemäß der Aussage von (C) dann (E) falsch sein. (E) ist aber sicher richtig (wenn wir einmal annehmen, dass 1+1=2 gilt, was in Witzen ja eine oft heftig diskutierte Wahrheit ist). Wenn (A) wahr wäre, würde das also zu diesem Widerspruch führen, daher ist (A) sicher falsch.
- Nehmen wir an, (B) wäre wahr. Dann müsste gemäß der Aussage von (B) auch (A) wahr sein, was wir aber gerade widerlegt haben. Also ist auch (B) falsch.
- Nehmen wir an, (C) wäre wahr. Dann müsste (E) falsch sein, also erhalten wir denselben Widerspruch wie bereits bei (A).
- Aussage (D) ist wahr, da wir ja bereits gezeigt haben, dass (B) falsch ist. Somit ist (D) die erste richtige Antwort.

22. Da y in der Gleichung nur als Quadratzahl vorkommt, ist für jeden Punkt (x, y), der auf der Kurve liegt, auch $(x, -y)$ Teil der Kurve. Die Kurve ist also symmetrisch um die x-Achse. Von den vier eingezeichneten Achsen ist nur c eine Symmetrieachse der Figur. Da die Figur auch keine weiteren Symmetrieachsen hat, ist c daher die x-Achse. Da die y-Achse dazu normal steht, muss a die y-Achse sein.

23. Beim Ausmultiplizieren von $(1 + 2 + \cdots + 10) \cdot (1 + 2 + \cdots + 10)$ wird jede Zahl aus der linken Klammer ein Mal mit jeder Zahl aus der rechten Klammer multipliziert, also erhält man genau die Summe aller Produkte aus der Tabelle. Daher gilt (unter Verwendung von $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$) also:

$$\begin{aligned}\text{Summe aller Produkte} &= (1 + 2 + \cdots + 10) \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) \\ &= \frac{10 \cdot (10 + 1)}{2} \cdot \frac{10 \cdot (10 + 1)}{2} \\ &= 55 \cdot 55 \\ &= 3025\end{aligned}$$

24. Wir stellen uns ein Auto vor, das entlang des regelmäßigen Vielecks ein Mal im Uhrzeigersinn im Kreis fährt. Es fährt also eine Seite lang geradeaus, dreht sich dann um einen gewissen Winkel (den sogenannten "Außenwinkel" des Vielecks) nach rechts, fährt wieder ein Stück, und so weiter. Am Ende hat es sich genau ein Mal ganz gedreht, also ist die Summe aller Außenwinkel immer gleich $360°$.

    Der Innenwinkel beträgt $180°$ minus Außenwinkel, also sind die Innenwinkel genau dann ganzzahlig, wenn auch die Außenwinkel es sind.

    Außerdem sind in einem regelmäßigen n-Eck alle Außenwinkel gleich groß, also hat jeder Außenwinkel eine Größe von $\frac{360°}{n}$.

    Es bleibt also nur noch zu untersuchen, für welche n der Wert $\frac{360}{n} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5}{n}$ ganzzahlig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn n ein Teiler von 360 ist.

    Kurzer Ausflug in die Theorie: Wenn die Primfaktorisierung einer Zahl gleich $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \cdots \cdot_k^{\alpha_k}$ ist (wobei die Primzahlen p_i alle verschieden sind), so ist die Anzahl der positiven Teiler (inklusive 1 und n) gleich $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha_k + 1)$. (Begründung: Eine Zahl ist genau dann ein Teiler, wenn sie eine Teilmenge der Primfaktoren von n enthält, also kann sie den ersten Primfaktor zwischen 0 und α_1 Mal enthalten, den zweiten zwischen 0 und α_2 Mal, und so weiter.)

    Also hat $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ genau $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Teiler. Davon müssen wir allerdings noch die Teiler 1 und 2 ausschließen, da es keine 1-Ecke und 2-Ecke gibt.

    Also bleiben 22 Arten von regelmäßigen Vielecken mit ganzzahligen Winkeln übrig.

25.
    - Die kleinste Summe von 9 verschiedenen 2er-Potenzen ist
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 2^9 - 1 = 511$.
    - Die zweitkleinste mögliche Summe von 9 verschiedenen 2er-Potenzen erhält man, wenn man 2^8 durch 2^9 ersetzt, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^9 = 511 - 2^8 + 2^9 = 767$.
    - Die drittkleinste Summe erhält man, wenn man nun weiters 2^7 durch 2^8 ersetzt, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 + 2^9 = 767 - 2^7 + 2^8 = 895$.
    - Für die viertkleinste Summe ersetzt man weiters 2^6 durch 2^7, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 895 - 2^6 + 2^7 = 959$.
    - Für die fünftkleinste Summe ersetzt man weiters 2^5 durch 2^6, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 959 - 2^5 + 2^6 = 991$.
    - Für die sechstkleinste Summe ersetzt man weiters 2^4 durch 2^5, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 959 - 2^4 + 2^5 = 1007$.

    Jede weitere mögliche Summe ist sicher noch größer als 1007 und somit mindestens vierstellig. Daher gibt es 5 verschiedene dreistellige Zahlen, die als Summe von genau 9 verschiedenen 2er-Potenzen dargestellt werden können.

26. Sei x die Seitenlänge BC, und h die Seitenlänge der Hypotenuse AC. Da das Dreieck rechtwinkelig ist, gilt nach Pythagoras, dass $x^2 + 20^2 = h^2$. Wir suchen also all jene x, für die $20^2 = h^2 - x^2 = (h + x)(h - x)$ gilt, mit ganzen Zahlen h und x.

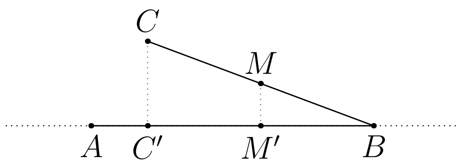
    Wir versuchen also, die Primfaktoren von $20^2 = 2^4 \cdot 5^2$ auf $(h + x)$ und $(h - x)$ aufzuteilen (sodass $(h + x)(h - x) = 20^2$ gilt), wobei $(h - x)$ sicher immer kleiner ist. Für $(h - x)$ kommen daher folgende Teiler von 20^2 in Frage, für die wir jeweils gleich auch h und x berechnen:

$\mathbf{h-x}$	$\mathbf{h+x}=\frac{20^2}{h-x}$	$\mathbf{h}=\frac{(h-x)+(h+x)}{2}$	$\mathbf{x}=h-(h-x)$	**Gültige Lösung**
1	400	200.5	199.5	NEIN (nicht ganzzahlig)
2	200	101	99	JA
4	100	52	48	JA
8	50	29	21	JA
16	25	20.5	4.5	NEIN (nicht ganzzahlig)
5	80	42.5	37.5	NEIN (nicht ganzzahlig)
10	40	25	15	JA
20	20	20	0	NEIN ($x=0$)

(Für alle weiteren Teiler von 20^2, die wir $h-x$ zuweisen könnten, wäre $h+x=\frac{20^2}{h-x}$ kleiner als $h-x$, also wäre x negativ. Daher brauchen wir diese Teiler nicht zu betrachten.)

Insgesamt haben wir also 4 Lösungen gefunden.

27. Wir betrachten zunächst eine Anwendung des Strahlensatzes, die wir nun ein paar Mal benötigen werden:



Sei AB eine Strecke und C ein Punkt, der nicht auf AB oder der Verlängerung davon liegt. Weiters sei M der Mittelpunkt von BC. Wir zeichnen die Höhenfußpunkte von C und M auf die Gerade AB (oder die Verlängerung davon) und erhalten C' und M'.

Die Schreibweise $d(X, YZ)$ bezeichne den Normalabstand eines Punktes X zur Strecke YZ (oder der Verlängerung davon). In unserem konkreten Fall gilt also $d(C, AB) = CC'$ und $d(M, AB) = MM'$.

Da CC' und MM' beide normal auf AB sind, sind sie parallel. Also gilt gemäß Strahlensatz, dass $BC : BM = BC' : BM' = CC' : MM'$. Da M der Mittelpunkt von BC ist, gilt $BC : BM = 2 : 1$, also folgt $d(C, AB) : d(M, AB) = CC' : MM' = BC : BM = 2 : 1$. Umgeformt erhalten wir also $d(M, AB) = \frac{1}{2}d(C, AB)$.

Nun wenden wir dies in der ursprünglichen Aufgabe einige Male an, um die Flächen der vier weggeschnittenen Dreiecke der Reihe nach zu berechnen. Die Schreibweise $[XYZ]$ bezeichne dabei die Fläche des Dreiecks XYZ.

- Die Breite und Höhe des Rechtecks bezeichnen wir mit $b = AB$ und $h = BC$. Also hat das Rechteck die Fläche $b \cdot h$.
- Für jedes der vier rechtwinkeligen Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB berechnet sich die Fläche als $\frac{b \cdot h}{2}$.
- Da M_1 der Mittelpunkt von CD ist, ist die Länge $M_1D = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}b$. Da die Fläche eines Dreiecks als "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" berechnet werden kann, erhalten wir $[M_1DA] = \frac{M_1D \cdot AD}{2} = \frac{\frac{1}{2}b \cdot h}{2} = \frac{1}{4}bh$.
- Als nächstes berechnen wir $[ABM_2]$. Gemäß unserer Vorüberlegung zum Strahlensatz mit Grundlinie AB und Punkt M_1 gilt $d(M_2, AB) = \frac{1}{2}d(M_1, AB) = \frac{1}{2}h$. Mit "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" berechnen wir also $[ABM_2] = \frac{AB \cdot d(M_2, AB)}{2} = \frac{b \cdot \frac{1}{2}h}{2} = \frac{1}{4}bh$.
- Nun berechnen wir $[BCM_3]$. Dafür benötigen wir die Höhe $d(M_3, BC)$. Da M_1 der Mittelpunkt von CD ist, gilt $d(M_1, AD) = \frac{1}{2}b$. Wegen der Vorüberlegung zum Strahlensatz mit Grundlinie DA und Punkt M_1 gilt $d(M_2, AD) = \frac{1}{2}d(M_1, AD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}b$.
  Wenn wir statt dem Abstand von M_2 zu AD jenen zur gegenüberliegenden Seite BC betrachten, gilt $d(M_2, BC) = b - d(M_2, AD) = b - \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}b$.
  Zuletzt wenden wir die Vorüberlegung auf die Grundlinie BC und den Punkt M_2 an und erhalten $d(M_3, BC) = \frac{1}{2}d(M_2, BC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}b = \frac{3}{8}b$.
  Wieder mit "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" berechnet sich die Fläche als $[BCM_3] = \frac{BC \cdot d(M_3, BC)}{2} = \frac{h \cdot \frac{3}{8}b}{2} = \frac{3}{16}bh$.
- Zuletzt benötigen wir die Fläche von CM_1M_4. Auch dazu berechnen wir zuerst die Höhe $d(M_4, CM_1)$. Wir haben bereits gezeigt, dass $d(M_2, AB) = \frac{1}{2}h$. Gemäß der Vorüberlegung mit Grundlinie AB und Punkt M_2 gilt $d(M_3, AB) = \frac{1}{2}d(M_2, AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}h$.
  Betrachtet man den Abstand von M_2 zu CD statt AB, so erhält man $d(M_2, CD) = h - d(M_2, AB) = h - \frac{1}{4}h = \frac{3}{4}h$.

Schließlich gilt wegen der Vorüberlegung mit Grundlinie CD und Punkt M_3, dass $d(M_4, CD) = \frac{1}{2}d(M_3, CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8}h$.

Mit "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" kann man die Dreiecksfläche nun berechnen: $[CM_1M_4] = \frac{CM_1 \cdot d(M_4,CD)}{2} = \frac{\frac{1}{2}b \cdot \frac{3}{8}h}{2} = \frac{3}{32}bh$.

- Für die Fläche $[M_1M_2M_3M_4]$ bleibt $[M_1M_2M_3M_4] = [ABCD] - [M_1DA] - [ABM_2] - [BCM_3] - [CM_1M_4] = bh - \frac{1}{4}bh - \frac{1}{4}bh - \frac{3}{16}bh - \frac{3}{32}bh = \frac{7}{32}bh$.
- Also gilt für das Verhältnis der Flächen, dass $[M_1M_2M_3M_4] : [ABCD] = \frac{7}{32}bh : bh = \frac{7}{32} : 1 = \frac{7}{32}$.

28. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} B &= \text{Anzahl blaue Quadrate} \\ b &= \text{Anzahl blaue Rechtecke, die keine Quadrate sind} \\ R &= \text{Anzahl rote Quadrate} \\ r &= \text{Anzahl rote Rechtecke, die keine Quadrate sind} \end{aligned}$$

Die Gesamtanzahl der blauen Rechtecke (sowohl Quadrate als auch "normale" Rechtecke) ist also $B + b$, die Gesamtanzahl der roten Rechtecke ist $R + r$.

Laut Angabe gelten folgende Bedingungen:

- $B + R = 7$ (Genau 7 der Rechtecke sind Quadrate.)
- $R + r = 3 + B$ (Es gibt um 3 rote Rechtecke mehr als blaue Quadrate.)
- $R = 2 + B + b$ (Es gibt auch um zwei rote Quadrate mehr als blaue Rechtecke.)

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $R = 7 - B$, also können wir die Variable R in den beiden anderen Gleichungen ersetzen und erhalten:

- $7 - B + r = 3 + B \iff 4 + r = 2B$
- $7 - B = 2 + B + b \iff 5 - b = 2B$

Da die rechten Seiten gleich sind, können wir auch die linken Seiten gleichsetzen und erhalten $4+r = 5-b$, oder umgeformt $r + b = 1$. Da r und b beides ganze Zahlen sein müssen, muss also eine davon gleich 1 und die andere gleich 0 sein.

Auch B muss eine ganze Zahl sein. Wenn wir daher beide obigen Gleichungen betrachten, sehen wir $B = \frac{4+r}{2} = \frac{5-b}{2}$ und können schließen, dass $r = 0$ und $b = 1$ ist, da die beiden Brüche sonst nicht ganzzahlig wären.

Also gilt $B = \frac{4+0}{2} = 2$, u gibt es insgesamt $B + b = 2 + 1 = 3$ blaue Rechtecke.

29. Wir betrachten die Runden der Reihe nach:

- Nach der ersten Runde sind alle mit einer ungeraden Nummer ausgeschieden, also bleiben noch 48 Zählende übrig, nämlich jene mit den Nummern $1, 3, 5, \ldots, 95$. Das nächste Vereinsmitglied zählt zu Beginn der darauffolgenden Runde mit 97 weiter. Da für uns nur wichtig ist, ob jemand eine gerade oder ungerade Zahl sagt, werden wir die konkreten Zahlen nicht mehr weiter mitrechnen sondern merken uns nur, dass die nächste Runde mit einer ungeraden Zahl begonnen wird.
- Deshalb bleibt bei der zweiten Runde 1 im Kreis, 3 scheidet aus, 5 bleibt im Kreis, und so weiter. Es bleiben also genau jene übrig, deren Zahl bei Division durch 4 den Rest 1 lässt. Da 48 gerade ist, bleiben von den 48 Personen nach der zweiten Runde genau die Hälfte übrig, und der letzte hat eine gerade Zahl gesagt.
- Die dritte Runde beginnt mit 24 verbleibenden Spielern und einer ungeraden Zahl. Übrig bleiben die Zahlen $1, 9, 17, \ldots$, also jene, die bei Division durch 8 den Rest 1 lassen. Wiederum ist 24 gerade, somit ist genau die Hälfte noch übrig, und die letzte Zahl war gerade.
- Die vierte Runde beginnt mit 12 verbleibenden Spielern und einer ungeraden Zahl. Übrig bleiben die Zahlen $1, 17, 33, \ldots$, also jene, die bei Division durch 16 den Rest 1 lassen. Da auch 12 gerade ist, bleibt genau die Hälfte übrig und die letzte Zahl war gerade.
- Auch die fünfte Runde verläuft wie die bisherigen: Es beginnt mit 6 Spielern und einer ungeraden Zahl, also bleiben $1, 33, 65$ übrig. Das sind genau jene Zahlen, die bei Division durch 32 den Rest 1 lassen und kleiner als 96 sind. Wieder hat der letzte eine gerade Zahl gesagt.

- Von den letzten drei Spielern sagt in der sechsten Runde zuerst 1 eine ungerade Zahl und bleibt, dann 33 eine gerade Zahl und geht, und 65 wieder eine ungerade Zahl und bleibt.
- In der siebenten und letzten Runde sagt nun 1 eine gerade Zahl und geht, und somit bleibt 65 alleine übrig.

30. Eine Teilungsregel für 11 besagt, dass eine Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme – also die erste Ziffer minus die zweite plus die dritte minus die vierte und so weiter – ebenfalls duch 11 teilbar ist.

    Im Wort *KANGAROO* heißt das also, dass wir Teilbarkeit durch 11 genau dann erreichen, wenn $K - A + N - G + A - R + O - O$ durch 11 teilbar ist. Da $A - A = 0$ und $O - O = 0$, können wir das noch vereinfachen zu $K + N - G - R$.

    Um eine möglichst große Zahl zu erhalten, muss man an die vordersten Stellen möglichst große Ziffern setzen. Wir beginnen also auf jeden Fall mit $K = 9$, $A = 8$ und $N = 7$. Die Summe $K + N - G - R = 9 + 7 - G - R = 16 - G - R$ muss durch 11 teilbar sein. Da G und R kleiner als 7 sein müssen (die großen Ziffernwerte sind ja schon vergeben), können wir 0 als Summe nicht mehr erreichen und zielen stattdessen auf $G + R = 5$ ab. Wiederum wollen wir möglichst weit vorne möglichst große Zahlen, also setzen wir $G = 5$ und $R = 0$. Somit bleibt nur noch O zu bestimmen, und dafür verwenden wir die größte noch verfügbare Ziffer 4. Die größtmögliche Zahl ist also 98758044.

    Für die kleinste mögliche Zahl setzen wir umgekehrt die kleinsten Ziffern an die vordersten Stellen, also $K = 1$ (da $K = 0$ verboten ist), $A = 0$ und $N = 2$. Wieder muss $K+N-G-R = 1+2-G-R = 3-G-R$ durch 11 teilbar sein. Da G und R beide mindestens 3 sind, können wir 0 als Summe nicht erreichen und streben stattdessen eine Summe von -11 an. (Eine Summe von -22 oder kleiner ist ebenfalls nicht möglich, da G und K jeweils höchstens 9 sein können.) Also soll gelten $G + R = 14$. Um die Zahl möglichst klein zu machen, sollte G so klein wie möglich sein, also umgekehrt R so groß wie möglich. Größer als 9 kann R aber nicht werden, also setzen wir $G = 5$ und $R = 9$. Es bleibt noch O zu bestimmen, und dafür verwenden wir wiederum die kleinste noch verfügbare Ziffer, also 3. Die kleinstmögliche Zahl ist daher 10250933.

    In beiden Fällen wurde $G = 5$ gesetzt.