KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Student, ab 11. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
30 Basispunkte
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2015“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 23. 3. 2015

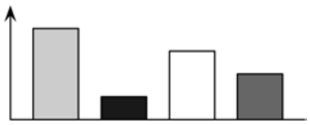
- 3 Punkte Beispiele -

1. Andrea ist irgendwann im Jahr 1997 geboren, und ihre Schwester Charlotte irgendwann im Jahr 2001. Was weiß man jedenfalls über den Altersunterschied der beiden Schwestern? Er beträgt
(A) weniger als 4 Jahre (B) mindestens 4 Jahre (C) genau 4 Jahre
(D) mehr als 4 Jahre (E) nicht weniger als 3 Jahre

2. $(a - b)^3 + (b - a)^3 =$
(A) 0 (B) $2\,(a - b)^3$ (C) $2a^3 - 2b^3$ (D) $2a^3 + 2b^3$ (E) $2a^3 + 6a^2b + 6ab^2 + 2b^3$

3. Wie viele reelle Lösungen hat die Gleichung $2^{2x} = 4^{x+1}$?
(A) 0 (B) unendlich viele (C) 2 (D) 1 (E) 3

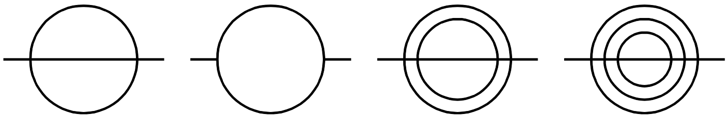
4. Diana zeichnet ein Säulendiagramm, in dem die Anzahl der vier Baumarten eingezeichnet sind, die sie auf einer Biologie-Exkursion gezählt hat. Heinz meint, ein Kreisdiagramm würde die Verhältnisse der verschiedenen Baumarten besser darstellen. Wie würde das Kreisdiagramm aussehen?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Man addiert alle ganzen Zahlen von 2001 bis 2031 und dividiert dann die Summe durch 31. Man erhält:
(A) 2012 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2496

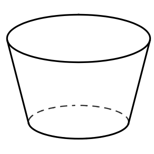
6. Wie viele der folgenden Figuren kann man mit einer durchgehenden Linie nachziehen (also ohne den Stift abzusetzen), ohne einen Abschnitt der Figur doppelt zu zeichnen?

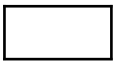
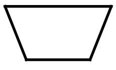
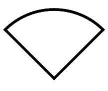
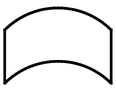
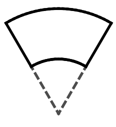


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

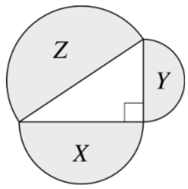
7. Ein Viereck heißt konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind. Die Anzahl der rechten Winkel in einem konvexen Viereck ist *n*. Welche der folgenden Listen ist eine vollständige Aufzählung der möglichen Werte von *n*?
(A) 0, 1, 2 (B) 0, 1, 2, 4 (C) 0, 1, 2, 3, 4 (D) 0, 1, 3 (E) 1, 2, 3

8. Ein Trinkglas hat die Form eines Kegelstumpfs. Das Glas soll außen (ohne oberen und unteren Kreis) mit Farbpapier umwickelt werden. Wie muss man das Papier schneiden, um das Glas vollständig ohne Überlappungen einzuwickeln?



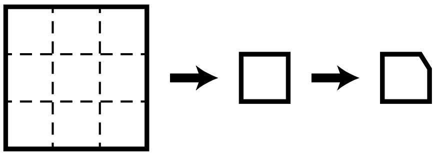
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

9. Drei Halbkreise haben die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks als Durchmesser. Ihre Flächen betragen wie abgebildet X cm², Y cm² und Z cm². Welche der folgenden Beziehungen ist sicher richtig?



(A) $X + Y < Z$ (B) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$ (C) $X + Y = Z$ (D) $X^2 + Y^2 = Z^2$ (E) $X^2 + Y^2 = Z$

10. Ein quadratisches Blatt Papier wird längs der strichlierten Linien in irgendeiner Reihenfolge und Richtung gefaltet. Vom resultierenden kleinen Quadrat wird eine Ecke abgeschnitten. Dann wird das Papier wieder entfaltet. Wie viele Löcher sind im Inneren des Blatts?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

- 4 Punkte Beispiele -

11. $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)}=$

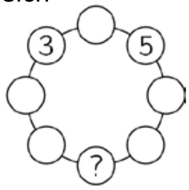
(A) $\sqrt{2015}$ (B) 2015 (C) 2016 (D) 2017 (E) 4030

12. Die x-Achse und die Graphen von $f(x)=2-x^2$ und $g(x)=x^2-1$ teilen die Koordinatenebene in

(A) 7 Regionen (B) 8 Regionen (C) 9 Regionen (D) 10 Regionen (E) 11 Regionen

13. Ella möchte in jeden Kreis der abgebildeten Figur eine Zahl schreiben, sodass jede Zahl gleich der Summe ihrer beiden Nachbarn ist. Welche Zahl muss Ella in den Kreis mit „?“ schreiben?

(A) -5 (B) -16 (C) -8 (D) -3 (E) Die Aufgabe hat keine Lösung.



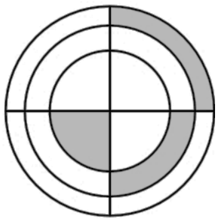
14. Von fünf positiven ganzen Zahlen a,b,c,d,e wissen wir: Alle Zahlen sind verschieden, $b=c:e$, $d=a+b$ und $a=e-d$. Welche der Zahlen a,b,c,d,e ist am größten?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

15. Das geometrische Mittel von n Zahlen ist definiert als die n-te Wurzel aus dem Produkt aller n Zahlen, also $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\dots\cdot x_n}$. Wir haben sechs Zahlen. Das geometrische Mittel von drei davon ist 3, das geometrische Mittel der drei anderen ist 12. Wie groß ist das geometrische Mittel dieser sechs Zahlen?

(A) 4 (B) 6 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{15}{6}$ (E) 36

16. In der Abbildung sehen wir drei konzentrische Kreise und zwei zueinander normal stehende gemeinsame Durchmesser. Die drei grauen Bereiche haben jeweils gleiche Fläche, der kleine Kreis hat den Radius 1. Wie groß ist das Produkt der drei Kreisradien?



(A) $\sqrt{6}$ (B) 3 (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 6

17. Die Bevölkerung Arnbergs stieg in den letzten 20 Jahren um 40%. In Berghausen stieg die Bevölkerung im selben Zeitraum um 60%. Insgesamt stieg die Bevölkerung der beiden Orte um 54%. Wie war das Verhältnis der Einwohnerzahlen vor 20 Jahren?

(A) 10:13 (B) 20:27 (C) 3:7 (D) 7:12 (E) 2:3

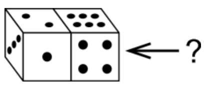
18. Bibi würfelt mit einem Würfel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tina würfelt gleichzeitig mit einem Würfel mit den Zahlen 2, 2, 2, 5, 5, 5. Tina gewinnt, wenn sie eine größere Zahl würfelt als Bibi. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tina gewinnt?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{7}{18}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{11}{18}$

19. In einem Rohr befinden sich 2015 Murmeln. Diese sind mit den Zahlen 1 bis 2015 durchnummeriert. Murmeln mit gleicher Ziffernsumme haben dieselbe Farbe und Murmeln mit verschiedener Ziffernsumme haben verschiedene Farben. Wie viele verschiedene Farben haben die Murmeln im Rohr?

(A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 2015

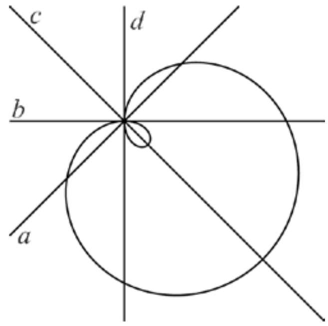
20. Auf einem Standardwürfel ist die Summe der Punktezahlen auf gegenüberliegenden Flächen immer 7. Zwei identische Standardwürfel sind in der Figur abgebildet. Wie viele Punkte können auf der nicht sichtbaren rechten Seitenfläche (mit „?“ gekennzeichnet) zu finden sein?



(A) nur 5 (B) nur 2 (C) entweder 2 oder 5 (D) entweder 1, 2, 3 oder 5 (E) entweder 2, 3 oder 5

- 5 Punkte Beispiele -

21. Die Aussagen (A) – (E) werden der Reihe nach auf ihre Wahrheit überprüft. Welche davon ist die erste wahre Aussage?
(A) (C) ist wahr. (B) (A) ist wahr. (C) (E) ist falsch.
(D) (B) ist falsch. (E) $1 + 1 = 2$



22. Die Kurve in der Abbildung wird durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

beschrieben. Welche der Geraden *a,b,c,d* ist dabei die y-Achse?
(A) a (B) b (C) c (D) d (E) keine davon

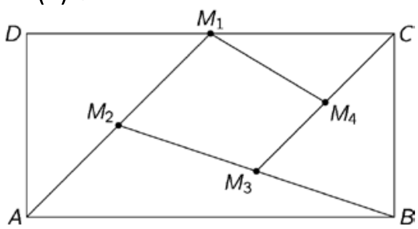
23. Die folgende Tabelle ist die Multiplikationstabelle der Zahlen von 1 bis 10. Wie groß ist die Summe aller 100 Produkte in der vollständigen Tabelle?
(A) 1000 (B) 2025 (C) 2500 (D) 3025 (E) 5500

•	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
3	3	6	9	...	30
...	...	...	...	...	...
10	10	20	30	...	100

24. Wie viele regelmäßige Vielecke gibt es, deren Winkel (in Grad) ganzzahlig sind?
(A) 17 (B) 18 (C) 22 (D) 25 (E) 60

25. Wie viele dreiziffrige positive ganze Zahlen kann man als Summe von genau neun verschiedenen Zweierpotenzen schreiben? (Hinweis: Zweierpotenzen sind 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …)
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Wie viele unterschiedliche Dreiecke ABC mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es, wenn $\angle ABC = 90°$ und $AB = 20$? (Hinweis: Zwei Dreiecke heißen unterschiedlich, wenn sie nicht kongruent sind.)
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6



27. Im abgebildeten Rechteck $ABCD$ ist M_1 der Mittelpunkt von DC, M_2 der Mittelpunkt von AM_1, M_3 der Mittelpunkt von BM_2 und M_4 der Mittelpunkt von CM_3. Bestimme das Verhältnis der Fläche des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ und der Fläche des Rechtecks $ABCD$.
(A) $\frac{7}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{7}{32}$ (D) $\frac{9}{32}$ (E) $\frac{1}{5}$

28. Auf einer Tafel befinden sich blaue und rote Rechtecke. Genau 7 der Rechtecke sind Quadrate. Es gibt um 3 rote Rechtecke mehr als blaue Quadrate. Es gibt auch um zwei rote Quadrate mehr als blaue Rechtecke. Wie viele blaue Rechtecke befinden sich auf der Tafel?
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 10

29. Die 96 Mitglieder eines Zählvereins stehen in einem Kreis und zählen. Sie beginnen mit 1, 2, 3, usw., jeder sagt die nächste Zahl, der Reihe nach den Kreis herum. Sagt ein Vereinsmitglied eine gerade Zahl, tritt es aus dem Kreis. Die anderen setzen fort, wobei sie die zweite Runde mit der Zahl 97 beginnen. Auf diese Art machen sie weiter, bis nur mehr ein Vereinsmitglied übrig bleibt. Welche Zahl hat diese Person in der ersten Runde gesagt?
(A) 1 (B) 17 (C) 33 (D) 65 (E) 95

30. Im Wort KANGAROO ersetzen Bill und Bob unabhängig voneinander die Buchstaben durch Ziffern, sodass die resultierenden Zahlen Vielfache von 11 sind. Jeder der beiden ersetzt jeweils verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern und gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern ($K \neq 0$). Bill erhält die größte mögliche Zahl und Bob die kleinste solche. In beiden Fällen wird ein Buchstabe durch die gleiche Ziffer ersetzt. Um welche Ziffer handelt es sich dabei?
(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6