# KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
# 23. 3. 2015

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9 – 10

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | E | B | E | B | C | E | A | D | C |

| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | C | C | A | B | D | D | B | D | E |

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | C | B | D | C | A | B | D | B | B |

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

# Känguru der Mathematik 2015
# Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
# Österreich - 23. 3. 2015

**- 3 Punkte Beispiele -**

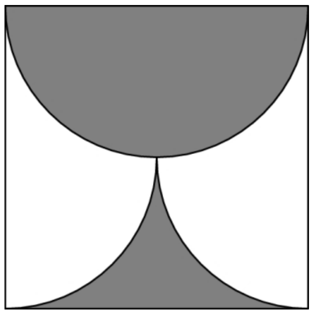
**1.** Welche der folgenden Zahlen liegt dem Produkt 20,15 x 51,02 am nächsten?
(A) 100 **(B)** 1000 (C) 10000 (D) 100000 (E) 1000000

$20{,}15 \cdot 51{,}02 \approx 20 \cdot 50 = 1000$. (Der genaue Wert ist $20{,}15 \cdot 51{,}02 = 1028{,}053$.)

**2.** Nachdem die Mutter T-Shirts zum Trocknen an die Wäscheleine gehängt hat, hängt ihr Sohn zwischen zwei benachbarte T-Shirts jeweils einen einzelnen Socken. Jetzt hängen 29 Wäschestücke an der Leine. Wie viele davon sind T-Shirts?
(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 14 **(E)** 15

Nach jedem T-Shirt (außer dem letzten) hängt ein Socken. An der Wäscheleine hängt also ein T-Shirt mehr als Socken hängen. Es hängen also 15 T-Shirts und 14 Socken.

**3.** Die grauen Bereiche des Quadrats mit Seitenlänge $a$ sind durch einen Halbkreis bzw. zwei Viertelkreise begrenzt. Wie groß ist ihre Gesamtfläche?
(A) $\frac{\pi a^2}{8}$ **(B)** $\frac{a^2}{2}$ (C) $\frac{\pi a^2}{2}$ (D) $\frac{a^2}{4}$ (E) $\frac{\pi a^2}{4}$

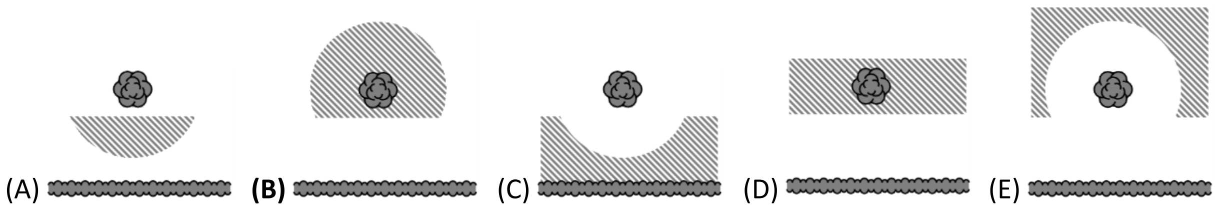


Wir teilen das Quadrat horizontal in zwei gleich große Rechtecke, sodass im oberen Rechteck der graue Halbkreis mit Radius $\frac{a}{2}$ ist. Das untere Rechteck besteht aus einem grauen Bereich und zwei deckungsgleichen weißen Bereichen. Diese weißen Bereiche sind jeweils ein Viertelkreis mit Radius $\frac{a}{2}$ und daher zusammen gleich groß wie der graue Halbkreis. Wir können die weißen Bereiche im unteren Rechteck also mit dem grauen Halbkreis genau bedecken und erhalten ein graues Rechteck mit der Fläche $a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$.

**4.** Anna, Beate und Cindy kaufen gemeinsam ein Sackerl mit 30 Keksen. Jede von ihnen bekommt 10 davon. Aber Anna hat 80 Cent bezahlt, Beate 50 Cent und Cindy 20 Cent. Um wie viele Kekse hätte Anna mehr bekommen, wenn sie die Kekse proportional zum bezahlten Preis aufgeteilt hätten?
(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 **(E)** 6

Wenn sie proportional geteilt hätten, so hätte Anna 16, Beate 10 und Cindy 4 Kekse erhalten. Anna hätte also um 6 Kekse mehr erhalten.

**5.** Mr. Hide möchte einen Schatz finden, den er schon vor Jahren in seinem Garten vergraben hat. Er kann sich nur erinnern, dass er den Schatz mindestens 5 m von der Hecke und höchstens 5 m vom alten Birnbaum vergraben hat. In welchem Bild ist der Bereich am besten dargestellt, in dem Mr. Hide nach dem Schatz suchen muss?



Wenn der Schatz vom Stamm des Baumes nur 5 m entfernt ist, so ist der mögliche Bereich ein Kreis rund um den Baum. Ein 5 m breiter Streifen entlang der Hecke kommt dabei nicht in Frage, da der Schatz mindestens 5 m von der Hecke entfernt ist. Der Kreis rund um den Baum ohne die Überlappung mit dem Streifen entlang der Hecke ist der graue Bereich in Figur (B).

**6.** Wie lautet die Einerziffer von $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$?
(A) 1 (B) 5 **(C)** 6 (D) 7 (E) 9

Da wir nur an der Einerziffer des Ergebnisses interessiert sind, müssen wir auch nur die Einerziffern aller vorkommenden Zahlen betrachten und es gilt:

- Die Einerziffer von $2015^0 = 1$ ist $1$.
- Für alle ganzen Zahlen $n \neq 0$ ist die Einerziffer von $2015^n$ gleich der Einerziffer von $5^n$ und diese ist $5$.

Die Einerziffer der gegebenen Rechnung ist also die Einerziffer von $5 + 1 + 5 + 5$, also $6$.

**7.** In einer Klasse gibt es 33 Jugendliche. Ihre Lieblingsfächer sind jeweils Informatik, Turnen oder beide. Drei von ihnen mögen beide Fächer gleich gern. Es gibt doppelt so viele Jugendliche, die nur Informatik lieben, wie solche, die nur Turnen lieben. Wie viele von ihnen lieben Informatik?
(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 **(E)** 23

Da drei Jugendliche beide Fächer gleich gern mögen, gibt es 30, die nur eines der beiden als Lieblingsfach haben. Von diesen mag ein Drittel nur Turnen und die anderen zwei Drittel nur Informatik. Es haben also $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ Jugendliche nur Informatik als Lieblingsfach, dazu kommen noch jene drei, die beide Fächer gleich gern mögen. Insgesamt mögen also $23$ Jugendliche Informatik.

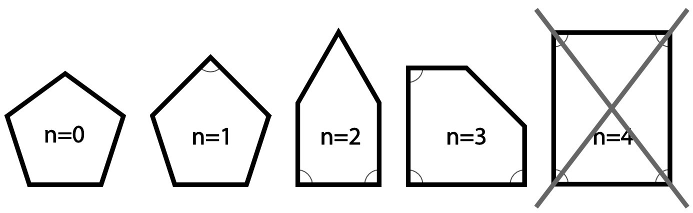
**8.** Welche der folgenden Zahlen ist weder eine Quadratzahl noch eine Kubikzahl?
**(A)** $6^{13}$ (B) $5^{12}$ (C) $4^{11}$ (D) $3^{10}$ (E) $2^9$

Es gilt $5^{12} = (5^4)^3$ ist eine Kubikzahl (und eine Quadratzahl in der Form $(5^6)^2$), $4^{11} = (2^2)^{11} = (2^{11})^2$ ist eine Quadratzahl, $3^{10} = (3^5)^2$ ist eine Quadratzahl und $2^9 = (2^3)^3$ ist eine Kubikzahl. $6^{13}$ ist weder eine Quadratzahl, noch eine Kubikzahl.

**9.** Herr Waxi kauft 100 Kerzen. An jedem Tag brennt er eine Kerze ab. Aus den Stümpfen von sieben abgebrannten Kerzen kann er immer eine neue Kerze machen. Nach wie vielen Tagen muss er wieder neue Kerzen kaufen?
(A) 112 (B) 114 (C) 115 **(D)** 116 (E) 117

Nach 98 Tagen hat er 98 Stümpfe und noch 2 ganze Kerzen. Aus den Stümpfen kann er $\frac{98}{7} = 14$ neue Kerzen machen. Nach weiteren $14$ Tagen hat er $14$ Stümpfe und noch immer $2$ ganze Kerzen. Aus den Stümpfen kann er wieder $\frac{14}{7} = 2$ neue Kerzen machen. Nach $4$ weiteren Tagen hat er $4$ Stümpfe, aber keine Kerze mehr und kann auch keine neue mehr machen. Er muss also nach $98 + 14 + 4 = 116$ Tagen neue Kerzen kaufen.

**10.** Ein Fünfeck heißt konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind. Die Anzahl der rechten Winkel in einem konvexen Fünfeck ist *n*. Welche der folgenden Listen ist eine vollständige Aufzählung der möglichen Werte von *n*?
(A) 1, 2, 3 (B) 0, 1, 2, 3, 4 **(C)** 0, 1, 2, 3 (D) 0, 1, 2 (E) 1, 2

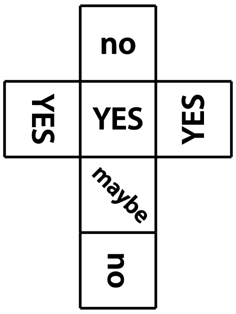



Ein regelmäßiges Fünfeck hat keinen rechten Winkel ($n = 0$). Setzt man auf die längere Basis eines Trapez (ohne rechte Winkel) mit der Hypotenuse ein rechtwinkeliges Dreieck auf, so erhält man ein Fünfeck mit einem rechten Winkel ($n = 1$). Wenn man auf ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck aufsetzt, so erhält man ein Fünfeck mit zwei rechten Winkeln ($n = 2$). Wenn man von einem Quadrat eine Ecke abschneidet, so erhält man ein Fünfeck mit drei rechten Winkeln ($n = 3$). Ein konvexes Polygon mit vier rechten Winkeln ist immer ein Rechteck und nie ein Fünfeck ($n \neq 4$).

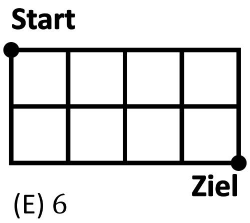
## - 4 Punkte Beispiele -

**11.** In der Abbildung sieht man meinen Entscheidungswürfel in drei verschiedenen Stellungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit diesem Würfel ein „YES“ zu erhalten


(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$




Wir zeichnen ein Netz des Würfels und sehen, dass „YES“ auf drei Seiten des Würfels steht. Die Wahrscheinlichkeit, ein „YES“ zu würfeln liegt also bei $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.




**12.** Die Seitenlänge jedes der kleinen Quadrate in der Figur ist 1. Wie lang ist der kürzeste Weg den man vom „Start“ bis zum „Ziel“ gehen kann, wenn man sich nur längs der Quadratseiten und Quadratdiagonalen bewegen darf?

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ **(C)** $2 + 2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

Wir verwenden zwei Diagonalen um den Weg nach unten zu gehen (dabei gehen wir auch zwei Schritte nach rechts). Durch den Gang einer Diagonalen erspart man sich zwei Seitenlängen für den selben Wegabschnitt. Es fehlen noch zwei Schritte nach rechts, um zum Ziel zu gelangen. Der Weg hat eine Länge von $2 \cdot \sqrt{2} + 2$.

**13.** Jeder Bewohner eines fernen Planeten hat mindestens zwei Ohren. Drei Einwohner mit den Namen Imi, Dimi und Trimi treffen sich in einem schicken Krater. Imi sagt: „Ich kann 8 Ohren sehen.“ Dimi sagt darauf: „Ich kann 7 Ohren sehen.“ Schließlich sagt Trimi: „Komisch, ich kann nur 5 Ohren sehen.” Keiner von ihnen kann die eigenen Ohren sehen. Wie viele Ohren hat Trimi?

(A) 2 (B) 4 **(C)** 5 (D) 6 (E) 7

Zusammen sehen Imi, Dimi und Trimi jedes Ohr genau zweimal. Sie zählen 8+7+5=20 Ohren und da jedes Ohr doppelt gezählt wurde haben sie zusammen 10 Ohren. Trimi sieht nur 5, muss also selbst auch 5 Ohren haben.

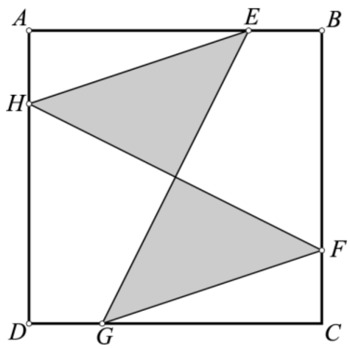
**14.** Ein quaderförmiger Behälter hat eine quadratische Basis mit Seitenlänge 10 cm. Er ist bis zu einer Höhe *h* mit Wasser gefüllt. Nun wird ein Metallwürfel mit Kantenlänge 2 cm hineingelegt. Dieser sinkt auf den Boden des Behälters. Das Wasser steht nun genau bis zur Oberkante des Metallwürfels. Bestimme *h*!

**(A)** 1,92 cm (B) 1,93 cm (C) 1,90 cm (D) 1,91 cm (E) 1,94 cm

Im Behälter befinden sich $100 \cdot h\ cm^3$ Wasser. Durch den Metallwürfel mit $8\ cm^3$ befinden sich $(100 \cdot h + 8)\ cm^3$ Wasser und Metall im Behälter, der bis zu einer Höhe von $2\ cm$ gefüllt ist. Wasser und Metallwürfel haben also zusammen $200\ cm^3$. Es gilt also $100 \cdot h + 8 = 200$ und somit $h = 1{,}92\ cm$.

**15.** Das Quadrat ABCD hat die Fläche 80. Die Punkte E, F, G und H liegen auf den Quadratseiten mit AE = BF = CG = DH.
Wie groß ist die Fläche des grauen Bereichs, wenn $\mathrm{AE} = 3 \cdot \mathrm{EB}$ gilt?

(A) 20 **(B)** 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

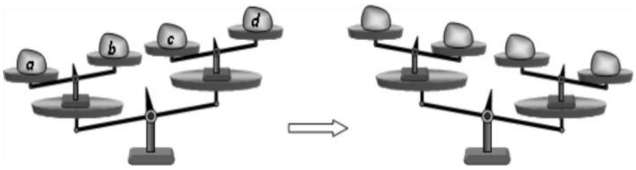


Es gilt $AB = BC = CD = DA = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}$ und daher $AE = BF = CG = DH = 3 \cdot \sqrt{5}$ und $EB = FC = GD = HA = \sqrt{5}$. Das Quadrat $EFGH$ ist so groß wie das Quadrat $ABCD$ ohne die Dreiecke $AEH$, $BFE$, $FCG$ und $GDH$ und hat die Fläche $80 - 4 \cdot \frac{(3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5})}{2} = 80 - 30 = 50$. Der graue Bereich ist genau die Hälfte des Quadrates $EFGH$ und hat daher die Fläche $\frac{50}{2} = 25$.

**16.** Multipliziert man das ganzzahlige Alter eines Vaters mit dem ganzzahligen Alter seines Sohnes, so erhält man 2015. Beide sind im 20. Jahrhundert geboren. Wie groß ist der Altersunterschied von Vater und Sohn?
(A) 26 (B) 29 (C) 31 **(D)** 34 (E) 36

Es gilt $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Da der Sohn im 20. Jahrhundert geboren wurde kann er nicht 5 oder 13 Jahre sein. Er ist also 31 Jahre und der Vater $5 \cdot 13 = 65$ Jahre. Der Altersunterschied ist $65 - 31 = 34$ Jahre.

**17.** Vier Objekte *a, b, c, d* wurden wie abgebildet auf eine doppelte Balkenwaage gelegt. Danach wurden zwei der Objekte vertauscht, was die abgebildete Änderung in der Stellung der Waage bewirkt hat. Welche beiden Objekte wurden vertauscht?




(A) $a$ und $b$ (B) $b$ und $d$ (C) $b$ und $c$ **(D)** $a$ und $d$ (E) $a$ und $c$

Durch das Vertauschen der zwei Objekte ändern sich alle drei Waagenstellungen. Es wurden also sicher nicht zwei Objekte einer kleinen Waage vertauscht. Die Antwort (A) scheidet daher aus. Es wurden auch nicht das jeweils schwerste der beiden kleinen Waagen bzw. das jeweils leichteste Objekt vertauscht. Daher scheiden die Antworten (B) und (E) aus. Wären $b$ und $c$ vertauscht worden, so wäre die linke Waage sicher schwerer als die rechte Waage. Bleibt also nur mehr Antwort (D). Wenn die vier Objekte *a, b, c, d* in dieser Reihenfolge die Massen 4, 3, 2 und 1 haben, so ergeben sie vor dem Vertauschen die erste Waagenstellung. Nach Vertauschen der Objekte *a* und *d* liegen sie in der Reihenfolge 1, 3, 2 und 4 auf der Waage und ergeben die zweite Waagenstellung.

**18.** Es ist bekannt, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 85x + c = 0$ Primzahlen sind. Wie groß ist die Ziffernsumme von $c$?
(A) 12 **(B)** 13 (C) 14 (D) 15 (E) 21

Da die Lösungen ganzzahlig sind können wir $x^2 - 85x + c = 0$ in der Form $(x - a)(x - b) = 0$ schreiben, wobei $a$ und $b$ die ganzzahligen Lösungen sind und $a + b = 85$, sowie $ab = c$ gilt. Primzahlen sind entweder ungerade oder 2. Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade, aber $a + b = 85$ ist ungerade. Wenn $a$ und $b$ also Primzahlen sind, so ist eine der beiden 2 und die andere $85 - 2 = 83$ (und 83 ist tatsächlich eine Primzahl). Dann ist also $c = 2 \cdot 83 = 166$ und die Ziffernsumme ist $1 + 6 + 6 = 13$.

**19.** Wie viele dreiziffrige positive ganze Zahlen gibt es, in denen sich direkt nebeneinander stehende Ziffern immer um 3 unterscheiden?
(A) 12 (B) 14 (C) 16 **(D)** 20 (E) 27

Wir schreiben alle möglichen Werte auf: 147, 141, 258, 252, 369, 363, 303, 474, 414, 585, 525, 696, 636, 630, 747, 741, 858, 852, 969, 963.

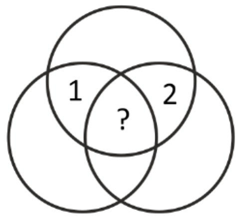
**20.** Welcher Wert der Variablen n ist ein Gegenbeispiel zur Aussage „Ist n eine Primzahl, dann ist genau eine der zwei Zahlen n – 2 und n + 2 eine Primzahl.“?
(A) 11 (B) 19 (C) 21 (D) 29 **(E)** 37

37 ist eine Primzahl, aber $37 - 2 = 35 = 5 \cdot 7$ ist keine Primzahl und $37 + 2 = 39 = 3 \cdot 13$ ist auch keine Primzahl. 37 ist also ein Gegenbeispiel.

Die anderen Antworten sind keine Gegenbeispiele, denn 11 ist zwar eine Primzahl, $11 + 2 = 13$ aber auch. 19 ist ebenso eine Primzahl und $19 - 2 = 17$ auch. 21 ist überhaupt keine Primzahl und daher auch kein Gegenbeispiel. 29 ist eine Primzahl, $29 + 2 = 31$ auch.

## - 5 Punkte Beispiele -

**21.** In der Abbildung sehen wir sieben Bereiche, die von drei Kreisen begrenzt werden. In jeden Bereich wird eine Zahl geschrieben. Es ist bekannt, dass jede Zahl gleich der Summe aller Zahlen in den angrenzenden Bereichen ist. (Zwei Bereiche werden als angrenzend bezeichnet, wenn sie mehr als einen Randpunkt gemeinsam haben.) Welche Zahl befindet sich im inneren Bereich?




**(A)** 0 (B) $-3$ (C) 3 (D) $-6$ (E) 6

Wir schreiben in die drei unteren leeren Felder von links nach rechts die Platzhalter $a$, $b$ und $c$ und es gilt daher

$$a = 1 + b$$
$$b = a + ? + c$$
$$c = 2 + b$$
$$? = 1 + 2 + b$$

Aus der ersten und dritten Gleichung berechnen wir $a + c = 1 + b + 2 + b = 3 + 2b$ und setzen das in die zweite Gleichung ein: $b = a + c + ? = 3 + 2b + ?$. Jetzt setzen wir noch die vierte Gleichung ein, erhalten $b = 3 + 2b + ? = 3 + 2b + 3 + b = 6 + 3b$ und lösen nach $b$ auf was uns $b = -3$ liefert.
Zuletzt berechnen wir jetzt $? = 3 + b = 3 - 3 = 0$.

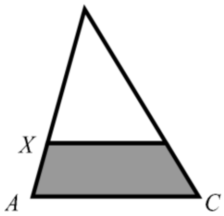
**22.** Wie viele zweiziffrige Zahlen kann man als Summe von genau sechs verschiedenen Zweierpotenzen schreiben? (Hinweis: Zweierpotenzen sind $2^0$, $2^1$, $2^2$, …)
(A) 0 (B) 1 **(C)** 2 (D) 3 (E) 4

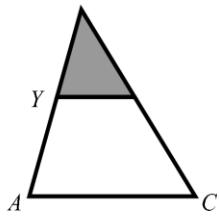
Die Zweierpotenz $2^7 = 128$ ist bereits dreiziffrig. Es können also nur die Zweierpotenzen $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, $2^6$ in der Summe vorkommen, wobei in jeder möglichen Summe genau eine dieser Zweierpotenzen nicht vorkommt. Die Summe aller sieben Zweierpotenzen ist $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7 - 1 = 127$. Mögliche Summen sind also $127 - 2^n$, wobei $0 \leq n \leq 6$ so zu wählen ist, dass $2^n > 27$ ist (nur dann ist die Summe zweiziffrig). Das gilt für $n = 6$ und $n = 5$. Es gibt also zwei mögliche Zahlen.

**23.** Petra hat drei verschiedene Wörterbücher und zwei verschiedene Romane im Bücherregal. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie die Bücher anordnen, wenn jedenfalls alle Wörterbücher zusammen stehen sollen, und ebenso auch die Romane?
(A) 12 **(B)** 24 (C) 30 (D) 60 (E) 120

Die Wörterbücher können alle links, oder alle rechts im Regal stehen. In beiden Fällen können die Wörterbücher auf $3! = 6$ und die Romane auf $2! = 2$ Arten angeordnet werden. Es gibt also $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten, die Bücher anzuordnen.

**24.** Im Dreieck *ABC* werden durch *X* und durch *Y* parallele Linien zur Basis *AC* eingezeichnet. Die Flächen der grauen Bereiche sind in beiden Fällen gleich groß. Das Verhältnis $BX : XA = 4 : 1$ ist bekannt. Wie groß ist das Verhältnis $BY : YA$?
(A) $1:1$ (B) $2:1$ (C) $3:1$ **(D)** $3:2$ (E) $4:3$



Die Höhe im Dreieck $ABC$ bezeichnen wir mit $h$. Die parallele Linie zu $AC$ durch $X$ hat die Länge $\frac{4 \cdot AC}{5}$ und das graue Trapez hat die Höhe $\frac{h}{5}$ (jeweils Strahlensatz). Der graue Bereich hat die Fläche $\frac{AC+\frac{4}{5}\cdot AC}{2} \cdot \frac{h}{5} = \frac{9}{50} \cdot AC \cdot h$.
Wir bezeichnen mit $a$ das Verhältnis $BY:BA$. Die parallele Linie zu $AC$ durch $Y$ hat die Länge $a \cdot AC$ und das graue Dreieck hat die Höhe $a \cdot h$ (jeweils Strahlensatz). Der graue Bereich hat also die Fläche $\frac{a \cdot AC \cdot a \cdot h}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot AC \cdot h = \frac{9}{50} \cdot AC \cdot h$. Und daher ist $BY:BA = a = 3:5$ und in weiterer Folge $BY:YA = 3:2$.

**25.** In einem rechtwinkeligen Dreieck teilt die Winkelsymmetrale eines spitzen Winkels die gegenüberliegende Seite in Strecken der Längen 1 bzw. 2. Wie lang ist diese Winkelsymmetrale?
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ **(C)** $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

Wir beschriften das Dreieck mit $A$, $B$ und $C$ so, dass $BC$ die Länge 3 hat und der rechte Winkel in $C$ liegt. Wir spiegeln das Dreieck an der Seite $BC$ und erhalten ein neues Dreieck $ABA'$. Die ursprüngliche Seite $BC$ ist nun eine Winkelsymmetrale und Schwerlinie des Dreiecks $ABA'$ und wird daher von den anderen Schwerlinien in Strecken der Längen 1 und 2 geteilt. Da die gegebene Winkelsymmetrale das erfüllt, ist diese gleichzeitig auch Schwerlinie des Dreiecks $ABA'$ und damit fallen der Inkreismittelpunkt und der Schwerpunkt des Dreiecks $ABA'$ auf einander. Daher ist das Dreieck $ABA'$ ein gleichseitiges Dreieck.
Die gegebene Winkelsymmetrale hat also ebenfalls die Länge 3 und wird durch die anderen Schwerlinien des Dreiecks $ABA'$ in Strecken der Längen 1 und 2 geteilt. Da die Strecke $BC$ nun eine Schwerlinie des Dreiecks $ABA'$ ist, hat die Winkelsymmetrale des Dreiecks $ABC$ die Länge $2 = \sqrt{4}$.

**26.** Eine zweiziffrige Zahl mit den Ziffern $x, y$, kann in der Form $\overline{xy}$ geschrieben werden. Es seien $a, b, c$ verschiedene Ziffern. Auf wie viele Arten kann man die Ziffern $a, b, c$ auswählen, sodass $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ gilt?
**(A)** 84 (B) 96 (C) 125 (D) 201 (E) 502

Aus $\overline{ab} < \overline{bc}$ folgt $a \leq b$ und da $a$ und $b$ verschieden sind, gilt $a < b$. Analog gilt $b < c$.
Wenn wir nun $a < b < c$ beliebig wählen, so gilt die Bedingung immer. Wählen wir $1 \leq b \leq 9$, so haben wir für die Wahl von $a$ noch $b - 1$ Möglichkeiten, dieses zu wählen und für $c$ noch $9 - b$ Möglichkeiten.
Insgesamt haben wir also $\sum_{b=1}^{9}(b-1)(9-b) = 0 + 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7 + 0 = 84$ Möglichkeiten für $a < b < c$.

**27.** Streicht man eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, n-1, n$, so ist der Durchschnitt der verbleibenden Zahlen 4,75. Welche Zahl wurde gestrichen?
(A) 5 **(B)** 7 (C) 8 (D) 9 (E) Die Zahl kann nicht eindeutig bestimmt werden.

Wir bezeichnen die Summe der verbleibenden Zahlen mi $S$. Da $4{,}75 \cdot (n-1) = S$ eine ganze Zahl ist, muss $n - 1$ ein Vielfaches von 4 sein. Außerdem gilt:

$$\frac{(n-1)n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) \leq S \leq 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \quad |:(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{2} \leq 4{,}75 \leq \frac{n+2}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad n \leq 9{,}5 \leq n+2$$

Und daher ist $n = 9$ ($n = 8$ ist nicht möglich, da $4|(n-1)$).
Wurde die Zahl $j$ gestrichen, so gilt $45 = \frac{n(n+1)}{2} = S + j = 4{,}75 \cdot (n-1) + j = 4{,}75 \cdot 8 + j = 38 + j$, also $j = 7$.

**28.** Die Ameise Tanti beginnt ein Abenteuer an einem Eckpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge 1. Sie möchte jede Kante des Würfels mindestens einmal entlangwandern, und am Schluss an ihren Ausgangseckpunkt zurückkehren. Wie lang ist ihr Spaziergang mindestens?
(A) 12 (B) 14 (C) 15 **(D)** 16 (E) 20

Wenn Tanti einen Eckpunkt des Würfels besucht, so verwendet sie zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Kanten, um zu dem Eckpunkt zu gelangen bzw. ihn wieder zu verlassen. Da in jedem Eckpunkt aber drei Kanten aneinanderstoßen muss sie auch jeden Eckpunkt mindestens zweimal besuchen. Der Würfel hat $8$ Ecken, Tanti muss also $2 \cdot 8 = 16$ Ecken besuchen und geht dafür mindestens $16$ Kanten entlang. Ihr Spaziergang ist also mindestens $16$ lang.

**29.** Zehn verschiedene Zahlen werden aufgeschrieben. Jede Zahl, die gleich dem Produkt der anderen neun Zahlen ist, darf danach unterstrichen werden. Wie viele Zahlen dürfen höchstens unterstrichen werden?
(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 9 (E) 10

Wir bezeichnen die zehn Zahlen mit $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ und das Produkt der zehn Zahlen mit $A$. Wenn eine Zahl $a_i$ unterstrichen werden darf, so ist sie das Produkt der anderen neun Zahlen. Es gilt dann also $a_i = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}}{a_i} = \frac{A}{a_i}$. Das ist gleichbedeutend zu $a_i^2 = A$ oder $a_i = \pm\sqrt{A}$. Es dürfen also höchstens zwei Zahlen unterstrichen werden, nämlich $\sqrt{A}$ und $-\sqrt{A}$.

**30.** Auf einer Geraden werden einige Punkte markiert. Danach werden alle möglichen Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte bestimmt. Ein markierter Punkt liegt im Inneren von genau 80 dieser Strecken, und ein weiterer liegt im Inneren von genau 90 davon. Wie viele Punkte wurden auf der Geraden markiert?
(A) 20 **(B)** 22 (C) 80 (D) 90 (E) Die Information genügt nicht, um dies zu bestimmen.

Wenn links von einem Punkt $n$ Punkte liegen und rechts davon $m$, so liegt der Punkt auf $n \cdot m$ Verbindungsstrecken. Wenn ein Punkt umgekehrt auf $c$ Verbindungsstrecken, so gibt es zwei ganze Zahlen $a$ und $b$ mit $c = ab$, sodass links des Punktes $a$ Punkte und rechts davon $b$ Punkte liegen.
Die Primfaktorzerlegung von 80 ist $2^4 \cdot 5$. Es können daher folgende Anzahlen an Punkten links bzw. rechts jenes Punktes liegen, der auf 80 Verbindungsstrecken liegt: $1|80, 2|40, 4|20, 8|10, 16|5$ und es gäbe in den einzelnen Fällen $1 + 1 + 80 = 82, 1 + 2 + 40 = 43, 1 + 4 + 20 = 25, 1 + 8 + 10 = 19, 1 + 16 + 5 = 22$ Punkte auf der Geraden.
Analog können folgende Anzahlen an Punkten links bzw. rechts jenes Punktes liegen, der auf 90 Verbindungsstrecken liegt: $1|90, 2|45, 3|30, 6|15, 9|10, 18|5$ und es gäbe in den einzelnen Fällen $92, 48, 34, 22, 20, 24$ Punkte auf der Geraden.
Die einzige Zahl, die in beiden Fällen vorkommt ist 22. Es gibt also 22 markierte Punkte auf der Geraden.