KÄNGURU DER MATHEMATIK 2014
20.3.2014

Kategorie: Student, ab 11. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2014“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2016 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

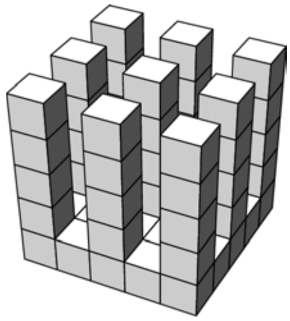
- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Vor- und Zuname des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2016 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -



1. Entfernt man von einem 5×5×5 Würfel einige 1×1×1 Würfel, erhält man den abgebildeten Körper. Dieser besteht aus einigen gleich hohen Säulen, die auf einer gemeinsamen Grundplatte stehen. Wie viele kleine Würfel werden entfernt?
(A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80

2. Heute haben Carmen, Gerda und Sabine Geburtstag. Die Summe ihrer Alter ist jetzt 44. Wie groß wird die Summe ihrer Alter sein, wenn sie zum nächsten Mal eine zweiziffrige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist?
(A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99

3. Wie groß ist der Wert von a^{-3k}, wenn $a^k = \frac{1}{2}$ gilt?
(A) $\frac{1}{8}$ (B) 8 (C) -8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

4. In drei verschieden großen Körben liegen insgesamt 48 Bälle. Im kleinsten und größten Korb liegen zusammen doppelt so viele Bälle wie im mittleren. Im kleinsten Korb liegen halb so viele Bälle wie im mittleren. Wie viele Bälle liegen im größten Korb?
(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 32

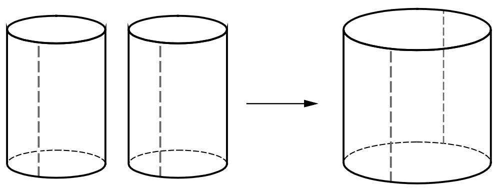
5. $\dfrac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}} = ?$
(A) 2^{2011} (B) 2^{2012} (C) 2^{2013} (D) 1 (E) 2

6. Welcher der folgenden Ausdrücke enthält den Faktor $b+1$ nicht?
(A) $2b+2$ (B) b^2-1 (C) b^2+b (D) $-1-b$ (E) b^2+1

7. Wie viele Ziffern hat das Ergebnis der Rechnung $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2$?
(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111

8. Der fesche Fritz hat eine geheime E-Mail-Adresse, die nur vier seiner Freunde kennen. Heute erhielt er auf dieser Adresse acht E-Mails. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?
(A) Fritz hat von jedem Freund zwei E-Mails erhalten.
(B) Fritz kann nicht von einem Freund acht E-Mails erhalten haben.
(C) Fritz hat von jedem Freund mindestens ein E-Mail erhalten.
(D) Fritz hat von einem seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.
(E) Fritz hat von mindestens zwei seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.

9. Zwei identische Zylindermäntel werden wie abgebildet längs der senkrechten strichlierten Linien aufgeschnitten und dann zu einem großen Zylindermantel zusammengeklebt. Was kann man über das Volumen des resultierenden Zylinders im Vergleich zum Volumen eines kleinen Zylinders sagen?



(A) Es ist 2-mal so groß. (B) Es ist 3-mal so groß.
(C) Es ist π-mal so groß. (D) Es ist 4-mal so groß.
(E) Es ist 8-mal so groß.

10. In der Jahreszahl 2014 sind alle Ziffern verschieden, und die letzte Ziffer ist größer als die Summe der anderen drei Ziffern. Vor wie vielen Jahren war dies zuletzt der Fall?
(A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 395 (E) 485

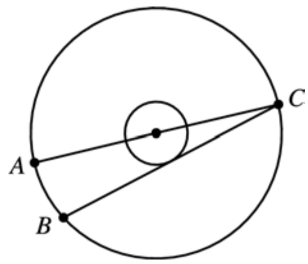
- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine quaderförmige Schachtel hat die Maße $a \times b \times c$ mit $a < b < c$. Vergrößert man a oder b oder c um 5 cm, vergrößert sich auch das Volumen der Schachtel. Wann ist die Zunahme am größten?

(A) Wenn man a vergrößert.
(B) Wenn man b vergrößert.
(C) Wenn man c vergrößert.
(D) Die Antwort ist von den Werten von a, b und c abhängig.
(E) Das Volumen vergrößert sich in den Fällen (A), (B) und (C) immer gleich stark.

12. Das Siegerteam eines Fußballspiels erhält 3 Punkte und das Verliererteam 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten die Teams je einen Punkt. Vier Teams A, B, C und D spielen ein Turnier. Jedes Team spielt genau einmal gegen jedes andere Team. Am Ende des Turniers hat das Team A 7 Punkte, und die Teams B und C haben je 4 Punkte. Wie viele Punkte hat das Team D?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4



13. Das Verhältnis der Radien zweier konzentrischer Kreise ist 1 : 3. Die Strecke AC ist ein Durchmesser des großen Kreises. Eine Sehne BC des großen Kreises berührt den kleinen Kreis (siehe Abbildung). Die Strecke AB hat die Länge 12. Wie groß ist der Radius des großen Kreises?

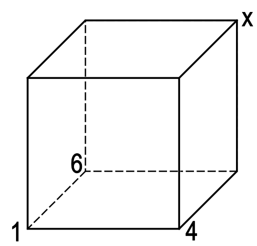
(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

14. Wie viele Tripel (a,b,c) ganzer Zahlen mit $a > b > c > 1$ erfüllen die Bedingung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$?

(A) keine (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) unendlich viele

15. Sechs Wochen sind $n!$ ($= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$) Sekunden. n = ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12



16. Die Eckpunkte eines Würfels werden so mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet, dass die Summe der Zahlen an den vier Eckpunkten einer Seitenfläche für alle Seitenflächen des Würfels gleich ist. Die Zahlen 1, 4 und 6 sind im Bild schon zu sehen. Welche Zahl steht an der Stelle x?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

17. Auf der Weichkäseverpackung steht: 24 % gesamter Fettanteil. Auf derselben Verpackung steht auch: 64% Fett in der Trockensubstanz. Wie groß ist der Prozentanteil von Wasser in diesem Weichkäse?

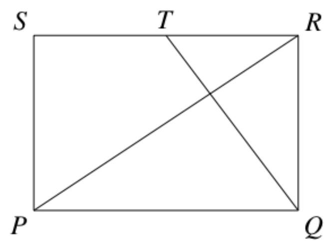
(A) 88 % (B) 62,5 % (C) 49 % (D) 42 % (E) 37,5 %

18. Die Funktion $f(x) = ax + b$ erfüllt die Bedingungen $f(f(f(1))) = 29$ und $f(f(f(0))) = 2$. Welchen Wert hat a?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

19. Unter 10 verschiedenen positiven ganzen Zahlen sind genau 5 durch 5 teilbar und genau 7 durch 7 teilbar. Es sei M die größte unter den gegebenen Zahlen. Was ist der kleinstmögliche Wert von M?

(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 (E) ein anderer Wert

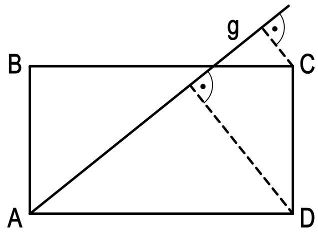


20. $PQRS$ ist ein Rechteck. T ist der Mittelpunkt von RS. QT steht normal zur Diagonale PR. Wie lautet das Verhältnis der Längen PQ : QR?

(A) 2 : 1 (B) $\sqrt{3}$: 1 (C) 3 : 2 (D) $\sqrt{2}$: 1 (E) 5 : 4

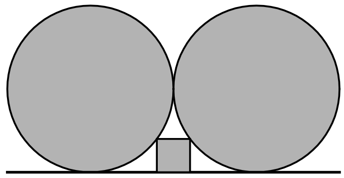
- 5 Punkte Beispiele -

21. Es sind *a,b,c* von Null verschiedene reelle Zahlen und *n* eine positive ganze Zahl. Es ist bekannt, dass die Zahlen $(-2)^{2n+3} \cdot a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ und $(-3)^{2n+2} \cdot a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ dasselbe Vorzeichen haben. Welche der folgenden Aussagen ist sicher wahr?
(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$



22. Die Gerade *g* geht durch den Eckpunkt *A* des abgebildeten Rechtecks *ABCD*. Der Normalabstand von *C* zu *g* ist 2 und der von *D* zu *g* ist 6. *AD* ist doppelt so lang wie *AB*. Bestimme die Länge von *AD*.
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$

23. Es gibt 9 Kängurus die Greatkangs genannt werden. Diese sind entweder weiß oder schwarz gefärbt. Treffen sich drei Greatkangs zufällig, ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines davon weiß ist, genau zwei Drittel. Wie viele Greatkangs sind schwarz?
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

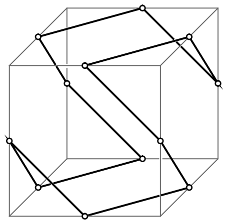


24. In nebenstehender Abbildung ist folgendes zu sehen: eine Gerade, die gemeinsame Tangente zweier berührender Kreise mit Radius 1 ist, und ein Quadrat mit einer Seite auf der Geraden und je einem Eckpunkt auf den beiden Kreisen. Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?
(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) $\frac{1}{2}$

25. Thomas möchte einige paarweise verschiedene positive ganze Zahlen aufschreiben, von denen keine größer als 100 sein soll. Ihr Produkt soll nicht durch 54 teilbar sein. Wie viele Zahlen kann er höchstens aufschreiben?
(A) 8 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

26. Zwei regelmäßige Vielecke mit der Seitenlänge 1 liegen auf gegenüberliegenden Seiten der gemeinsamen Seite *AB*. Eines davon ist das 15-Eck $ABC_1D_1E_1$... und das andere ist das *n*-Eck $ABC_2D_2E_2$... . Für welchen Wert von *n* ist der Abstand von C_1 zu C_2 genau 1?
(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

27. Die Gleichungskette $k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ soll für positive ganze Zahlen *k*, *m*, *n* gelten. Wie viele verschiedene Werte kann *m* annehmen?
(A) keine (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) unendlich viele



28. Im Bild sehen wir ein geschlossenes Vieleck, dessen Eckpunkte jeweils die Mittelpunkte der Würfelkanten sind. Ein Innenwinkel wird wie üblich als der Winkel definiert, den zwei Vieleckseiten im gemeinsamen Endpunkt einschließen. Wie groß ist die Summe aller Innenwinkel des Vielecks?
(A) 720° (B) 1080° (C) 1200° (D) 1440° (E) 1800°

29. Die Abbildung $f: Z \to Z$ erfüllt die Bedingungen $f(4) = 6$ und $x \cdot f(x) = (x-3) \cdot f(x+1)$. Welchen Wert hat der Ausdruck $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?
(A) 2013 (B) 2014 (C) 2013·2014 (D) 2013! (E) 2014!

30. In den Wäldern eines magischen Inselreichs gibt es drei Tierarten: Löwen, Wölfe und Ziegen. Wölfe können Ziegen fressen und Löwen können sowohl Wölfe als auch Ziegen fressen. Da es sich um ein magisches Inselreich handelt, verwandelt sich ein Wolf, der eine Ziege frisst, in einen Löwen. Ein Löwe, der eine Ziege frisst, verwandelt sich in einen Wolf und ein Löwe, der einen Wolf frisst, verwandelt sich in eine Ziege. Zu Beginn befanden sich 17 Ziegen, 55 Wölfe und 6 Löwen auf der Insel. Nach einiger Zeit ist kein weiteres Fressen mehr möglich. Wie groß ist die maximale Anzahl der Tiere, die sich dann noch auf der Insel befinden können?
(A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35