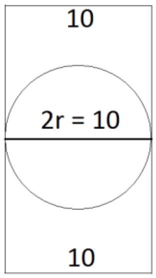
Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Student (11. – 13. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

LÖSUNGEN

- 3 Punkte Beispiele -

1. Am größten ist natürlich 20^{13}. Das sieht man recht schnell, indem man etwa die Anzahl der Stellen aller Zahlen abschätzt: 2013 ist vierstellig, $2^{0+13} = 2^{13} = 2^6 \times 2^7 = 64 \times 128$ ist vierstellig, $20^{13} = 2^{13} \times 10^{13}$ ist siebzehnstellig, 201^3 ist siebenstellig und 20 x 13 ist dreistellig. Damit lautet die richtige Antwort hier C.



2. Man betrachtet irgendein Paar von parallelen Diagonalen. Diese haben den gleichen Abstand voneinander wie die Seitenlänge des Achtecks, also 10. Diese Diagonalen tangieren beide den Kreis. Man kann normal zu diesen beiden Tangenten zwei Radien in den Kreis einzeichnen, die dieselbe Richtung haben und sich gegenseitig zu einem Durchmesser ergänzen: Der Durchmesser ist also 10 lang, der Radius somit 5; also stimmt Antwort C.

3. Ein Prisma besteht aus einer polygonalen Grundfläche, einer dazu kongruenten Deckfläche und mehreren Seitenflächen, die im allgemeinen Fall Parallelogramme sind. Da alle zusammen 2013 ergeben, hat das Prisma 2011 Seitenflächen. Damit müssen Grund- und Deckfläche 2011-Ecke sein.
Die Kanten kann man nun zum Beispiel so zählen: Eine Kante gehört immer zu ZWEI Flächen. Daher kann man zunächst einmal ALLE Kanten ALLER Flächen zählen und am Ende durch 2 dividieren, weil man dann jede Kante genau doppelt gezählt hat.
Also: Grund- und Deckfläche haben je 2011 Kanten, alle 2011 Seitenparallelogramme haben 4 x 2011 Kanten, das macht 6 x 2011 Kanten, dividiert durch zwei ergibt das 3 x 2011 = 6033 Kanten; also lautet die richtige Antwort E.

4. Hier ist ein sauberer Umgang mit Potenzrechengesetzen gefragt: $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 3^{9\cdot 3} = (3^9)^3$.
Die dritte Wurzel daraus ist $3^9 = 3^{3^2}$; richtig ist daher Antwort D.

5. In diesem Jahrtausend ist 2013 die kleinste Jahreszahl, die sich aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern aufbauen lässt. Daher lag die letzte Jahreszahl, die dieselbe Eigenschaft besitzt, sicherlich im alten Jahrtausend und war 1432. Die Differenz zwischen diesen beiden Jahren beträgt 581, damit ist Antwort C richtig.
P.S.: Weitere Jahreszahlen mit demselben Bildungsprinzip waren im letzten Jahrtausend auch noch 1023, 1032, 1203, 1230, 1234, 1243, 1302, 1320, 1324, 1342, 1423;

6. Lineare Funktionen haben die Eigenschaft, dass sie immer die gleiche Änderungsrate alias Steigung aufweisen. Das heißt: Wenn f(2013) – f(2001) = 100 gilt, dann steigt die Funktion um 100 an, wenn sich x um 12 vergrößert.
f(2031) – f(2013) ist die Änderung der Funktion, wenn sich x um 18 ändert. Da 18 das 1,5-fache von 12 ist, steigt die Funktion in diesem Intervall um 1,5 x 100 = 150 an. D ist die richtige Antwort.

7. Wir checken die einzelnen Aussagen alle durch: $4 < x^2 < 9$ folgt aus der Beziehung durch direktes Quadrieren. Das ist hier unproblematisch, weil alle Größen positiv sind.
Verdoppeln der Beziehung liefert $4 < 2x < 6$, was natürlich auch bei Vergrößern von 6 zu 9 richtig bleibt.
Verdreifachen der Beziehung liefert direkt $6 < 3x < 9$.
$x^2 - 2x = x(x-2)$. Da man $x > 2$ voraussetzt, ist auch $(x-2)$ positiv und es gilt: $x^2 - 2x > 0$.
Andererseits wächst die Funktion $x(x-2)$ für $x > 2$, weil sowohl x als auch $(x-2)$ wachsen und damit auch ihr Produkt wächst. Da jedoch auch $x < 3$ gilt, ist $(x-2) < 1$ und das Produkt $x(x-2)$ bleibt kleiner als 3. Damit ist auch diese letzte Aussage richtig. Alle vier Aussagen stimmen und daher lautet die Antwort E.

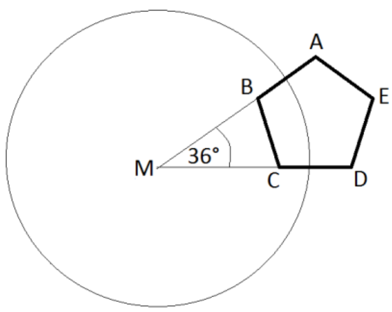
8. Der erste, zweite und dritte der einsamen Helden haben insgesamt 6 Bösewichte erwischt. Damit bleiben für die Helden Nr. 4, 5 und 6 noch 14 Bösewichte.
Hätte der vierte Held 7 Bösewichte geschnappt, würde es sich leicht ausgehen, dass er am meisten gefangen hätte, denn Held Nr. 5 und 6 könnten etwa 2 resp. 5 Bösewichte geschnappt haben.
Hätte der vierte Held 6 Bösewichte geschnappt, würde es sich auch ausgehen, dass er am meisten gefangen hätte, denn Held Nr. 5 und 6 könnten etwa 3 resp. 5 Bösewichte geschnappt haben.
Hätte der vierte Held 5 Bösewichte geschnappt, müssten Held Nr. 5 und 6 gemeinsam 9 Bösewichte schnappen. Dann muss aber einer von beiden mindestens 5 gefangen haben; somit kann der vierte Held nicht mehr am meisten Bösewichte geschnappt haben.
6 ist also die Minimalzahl von Bösewichten, bei der das möglich ist; also ist Antwort B richtig.

9. Nach dem Ausschlussprinzip folgert man: A (Ansicht von vorne auf die Pyramidenfläche ABS), B (Ansicht von rechts auf die Pyramidenfläche BCS), C (Ansicht von unten) und D (Ansicht von oben) können alle entstehen, E jedoch ist nicht möglich. Dazu müsste die Spitze der Pyramide in einem Flächenmittelpunkt liegen und man von oben auf die Pyramide schauen.

10. Wenn die Substanz schmilzt, vergrößert sich ihr Volumen von V um $\frac{1}{12}$ auf $\frac{13}{12}$V. Wenn sich die Substanz wieder verfestigt, dann nimmt ihr Volumen von $\frac{13}{12}\mathrm{V}$ auf $\mathrm{V} = \frac{12}{12}\mathrm{V}$ ab: Sie besteht also vorher aus 13 Zwölftel-Volumina und beim Erstarren nur noch aus 12 Zwölftel-Volumina. Einer von 13 Volumenteilen geht verloren, damit verkleinert sich das Volumen um $\frac{1}{13}$. Antwort D ist richtig.

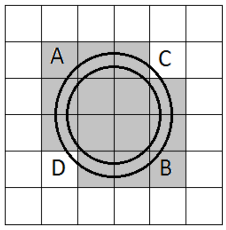
- 4 Punkte Beispiele -

11. Ergänzt man eines der Fünfecke um die Verlängerung der beiden Seiten AB und DC, so schneiden sich diese im Mittelpunkt des Kreises, wie in der Skizze zu sehen ist. Ein regelmäßiges Fünfeck hat eine Innenwinkelsumme von $3 \cdot 180° = 540°$ und jeder der Innenwinkel ist gleich groß, also 108°. Damit kann man die beiden Basiswinkel des Dreiecks MBC bestimmen: Sie ergänzen sich mit 108° auf einen gestreckten Winkel, sind also 72° groß. Damit beträgt aber der Winkel $\angle$BMC = 36°. Aus der Sicht des Kreismittelpunkts M nimmt ein Fünfeck also einen „Sichtwinkel“ von 36° ein, damit haben am Kreis 10 Plättchen (= 360° : 36°) Platz (Antwort C).



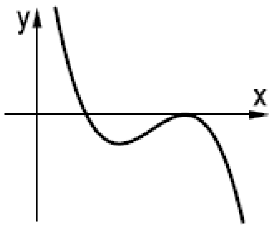
12. Der Reihe nach: Damit $\frac{n}{3}$ gerade noch dreiziffrig ist, muss der Bruch mindestens 100 groß sein und somit n also mindestens 300. Andererseits ist 3n als 999 gerade noch dreiziffrig, also kann n höchstens 333 groß sein. Damit hätte man 34 Kandidaten, aber Vorsicht: $\frac{n}{3}$ muss ja auch noch ganzzahlig sein. Das geht nur dann, wenn n durch 3 teilbar ist. Damit bleiben nicht mehr viele Zahlen übrig: 300, 303, 306, …. 330, 333. Das sind genau 12 Zahlen, damit stimmt Antwort A.

13. Das graue Muster in Lösung E kann nicht durch einen Kreis bedeckt werden. Da dieses Muster (auch) punktsymmetrisch ist, sollte der Kreis seinen Mittelpunkt im Symmetriezentrum des Musters haben. Ein kleiner Kreis, der die beiden weißen Einbuchtungen C und D meidet, meidet aber auch die äußeren Ecken A und B. Gleichzeitig durchquert ein etwas größerer Kreis, der A und B schneidet, auch C und D.

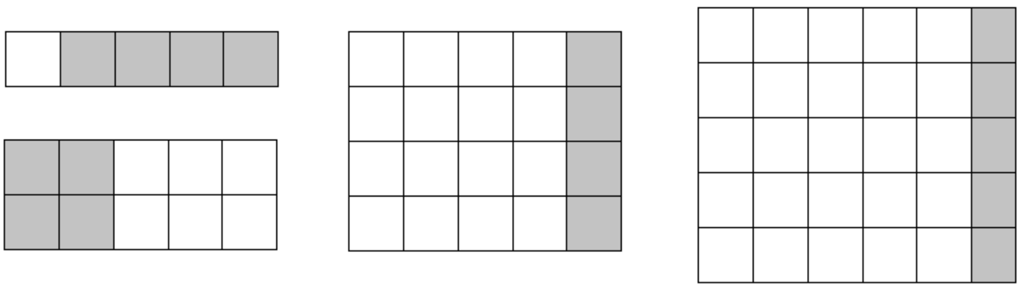


14. Die Negation lautet D: „Es existiert eine gerade Zahl x, für die f(x) ungerade ist.“
Die Negation behauptet eben, dass NICHT „für jedes gerade x f(x) gerade ist“, also muss es mindestens ein gerades x geben, für das f(x) ungerade ist. Und nachdem sowohl bei der Definitions- als auch Wertemenge ganze Zahlen im Spiel sind, gibt es dort nur gerade und ungerade Zahlen; daher ist innerhalb von Z „ungerade“ das Gegenteil von „gerade“.

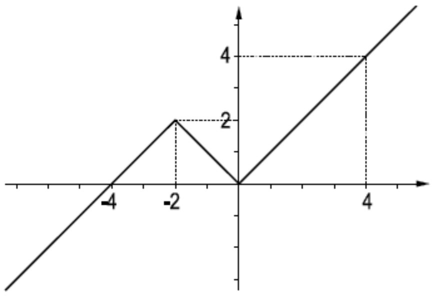
15. Für das Aufspüren des Graphen von $f(x) = (a – x)(x – b)^2$ reicht es aus, einige kleine Dinge zu beobachten. Zunächst einmal kann man festhalten, dass $f(x) = 0$ dann wird, wenn $x = a$ oder wenn $x = b$ gilt. Das bedeutet, dass die Funktion genau 2 Nullstellen hat, wodurch Graph E ausscheidet.
Da $(x – b)^2$ als Quadrat nie negativ ist, hängt das Vorzeichen der Funktion vom Faktor $(a – x)$ ab. Dieser Ausdruck ist positiv, wenn $x < a$ gilt, und negativ, wenn $x > a$.
Daraus kann man folgern, dass die Funktion an der Stelle $x = a$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen y-Werten vollzieht (Schnitt mit x-Achse). Laut Angabe ist $a < b$, daher muss der Schnitt mit der x-Achse bei der Nullstelle mit dem kleineren x-Wert sein; bei der zweiten Nullstelle berührt die Funktion die x-Achse nur (ohne Vorzeichenwechsel). Das ist nur bei Graph A der Fall.



16. Damit bei einem Rechteck überhaupt erst einmal die Fläche von 4 cm² bei einer Länge von 5 cm zustande kommt, muss die Breite mindestens 0,8 cm betragen. Dann ist das ganze Rechteck 4 cm² groß.
Vergrößert man die Breite ein wenig, wächst die Gesamtfläche über 4 cm² hinaus und irgendwann ist beim 5x1cm²-Rechteck durch Zerschneiden ein 1x1 cm²-Quadrat und ein 4x1 cm²-Rechteck möglich.
Wächst die Breite auf 2 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein 2x2 cm²-Quadrat und ein 3x2 cm²-Rechteck. In diesem Fall ist der 4 cm² große Flächenteil das Quadrat selbst.
Wächst die Breite auf 4 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein 4x4 cm²-Quadrat und ein 1x4 cm²-Rechteck.
Wächst schließlich die Breite auf 5,8 cm, entstehen durch Zerschneiden ein 5x5 cm²-Quadrat und ein 0,8x5 cm²-Rechteck. Da das 5x5 cm²-Quadrat das größtmögliche Quadrat ist, das in einem 5 cm langen Rechteck Platz hat, gibt es darüber hinaus keine Möglichkeiten mehr. Daher gibt es 4 derartige Rechtecke (Antwort D).



17. Der Ausdruck f(f(f(x))) bedeutet, dass ein x-Wert in f(x) eingesetzt wird, dieses Ergebnis wird dann wiederum in f(x) eingesetzt [das ist dann f(f(x))]. Wird dieses Ergebnis wiederum in f(x) eingesetzt, entsteht der Ausdruck f(f(f(x))).
Wir sehen uns zunächst einmal an, wo die Funktion f ihre Nullstellen hat: Es gibt offensichtlich derer 2, nämlich $\boxed{f(-4) = 0}$ (1) und $\boxed{f(0) = 0}$ (2). Vergleicht man das mit f(f(f(x))) = 0, folgen die beiden neuen Gleichungen $\boxed{f(f(x)) = -4}$ (3) und $\boxed{f(f(x)) = 0}$ (4) – das Ergebnis von f(f(x)) muss ja offensichtlich – 4 oder 0 ergeben, damit f(f(f(x))) = 0 ergibt.



Gleichung (3) kann man vereinfachen, indem man am Graphen abliest, dass f(– 8) = – 4 gilt, somit folgt daraus die Gleichung f(x) = – 8. Diese hat aber die einzige Lösung x = – 12. Gleichung (4) kann man wiederum durch (1) und (2) in die neuen Gleichungen $\boxed{f(x) = -4}$ (5) und $\boxed{f(x) = 0}$ (6) überführen. Gleichung (5) hat als einzige Lösung x = – 8. Gleichung (6) hat die beiden Lösungen x = – 4 und x = 0.
Somit gibt es insgesamt 4 Lösungen zu Peters Gleichung:
f(f(f(– 12))) = f(f(f(– 8))) = f(f(f(– 4))) = f(f(f(0))) = 0.
Antwort A ist korrekt.

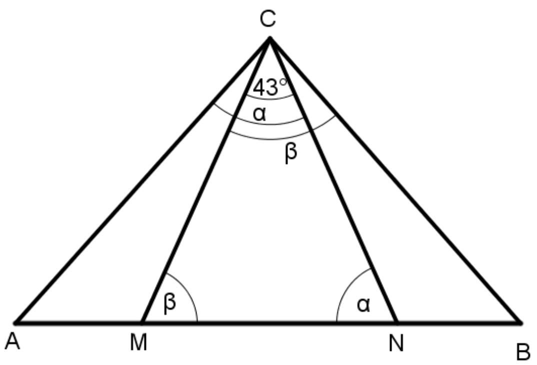
18. Man schreibt die Gleichung um zu $x^2y^3 = 2^{12} \cdot 3^{12}$. Nun helfen uns die Regeln der Potenzrechnung: Für x bzw. y setzt man nun Kombinationen von Potenzen der Faktoren 2 und 3. Hier wäre das Lösen durch Probieren aber noch sehr umständlich. Erkennt man aber, dass x^2 die beiden Faktoren 2 und 3 eine gerade Anzahl mal oft enthalten muss, y^3 dagegen die beiden Faktoren 2 und 3 eine Anzahl mal oft enthalten muss, die durch 3 teilbar ist. So ergibt $x^2y^3 = (2^3 \cdot 3^3)^2(2^2 \cdot 3^2)^3 = (2^6 \cdot 3^6)(2^6 \cdot 3^6) = 2^{12} \cdot 3^{12}$ das gewünschte Ergebnis.
Nun muss/kann man einfach durch systematisches Probieren alle Lösungen finden:

x	$2^6 \cdot 3^6$	$2^6 \cdot 3^3$	$2^6 \cdot 3^0$	$2^3 \cdot 3^6$	$2^3 \cdot 3^3$	$2^3 \cdot 3^0$	$2^0 \cdot 3^6$	$2^0 \cdot 3^3$	$2^0 \cdot 3^0$
y	$2^0 \cdot 3^0$	$2^0 \cdot 3^2$	$2^0 \cdot 3^4$	$2^2 \cdot 3^0$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^4$	$2^4 \cdot 3^0$	$2^4 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 3^4$

Die Zahl der Lösungen ist 9, somit ist E die richtige Antwort.

19. Die Ziffernsummen auf den Karten reichen von 1 (bei der Zahl 100) bis 27 (bei der Zahl 999), jede andere Ziffernsumme dazwischen kommt auch vor. Somit gibt es 27 verschiedene Werte für die Ziffernsumme der Karten. Nun betrachten wir den *„worst case“*: Angenommen, Franz zieht lauter Karten mit verschiedener Ziffernsumme, also 27 Stück: Dann hat er allerdings die beiden Karten 100 und 999 auch gezogen, und nun haben die restlichen Karten nur noch Ziffernsummen, die von 2 (bei 101 oder 110) bis 26 (bei 998, 989 oder 899) reichen, also gibt es nur noch 25 verschiedene Werte für die Ziffernsumme. Angenommen, er zieht nun neuerlich 25 Karten mit verschiedenen Ziffernsummen, dann besitzt er insgesamt 52 Karten, bei denen dieselbe Ziffernsumme höchstens doppelt vorkommt. Aber spätestens die 53. Karte hat eine Ziffernsumme, die schon zweimal vorliegt. Somit ist hier die richtige Antwort C.

20. Die beiden Dreiecke ANC und BCM sind gleichschenklig, daher treten zweimal der Winkel α (= $\angle$CNA = $\angle$ACN) und der Winkel β (= $\angle$BMC = $\angle$MCB) auf. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck CMN gilt: $\alpha + \beta = 137°$. Andererseits überlappen sich der Winkel α und der Winkel β bei C um den Winkel 43°. Daher gilt: $\angle ACB = \alpha + \beta - 43° = 94°$. Antwort E stimmt.

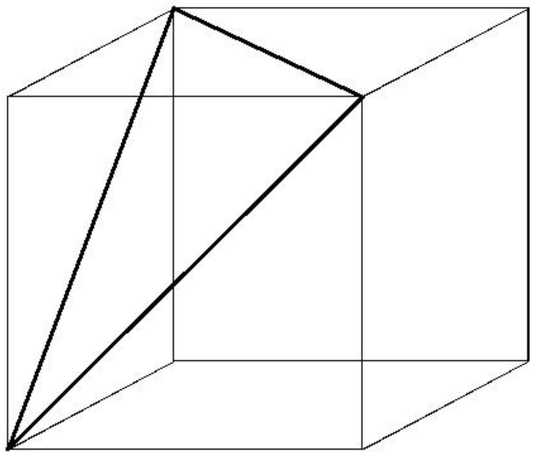


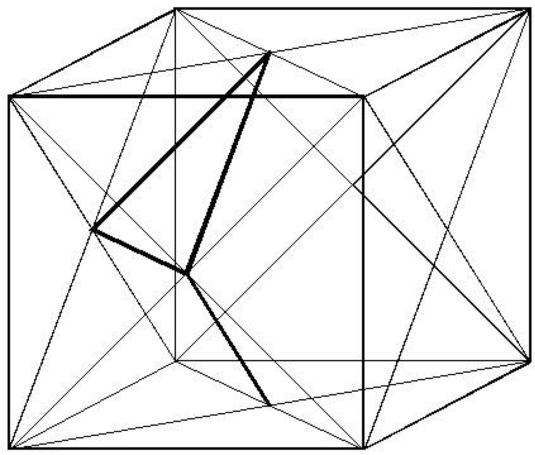
- 5 Punkte Beispiele -

21. Als Gleichung sieht die Behauptung so aus: $xy = 5(x + y)$. Um diese Gleichung systematisch zu lösen, kann man sie etwas umformen: $xy - 5x - 5y = 0$. Nun addiert man auf beiden Seiten 25: $xy - 5x - 5y + 25 = 25$. Dann steht nämlich links ein Produkt, und zwar $(x - 5)(y - 5) = 25$.
Da x und y ganze Zahlen sind, sind es $(x - 5)$ und $(y - 5)$ auch, und weil diese beiden ganzen Zahlen als Produkt 25 bilden, braucht man nur noch eine Liste aller Möglichkeiten zu finden, wie man die Zahl 25 als Produkt zweier ganzer Zahlen schreiben kann:
$25 = 1 \cdot 25 = 5 \cdot 5 = (-5) \cdot (-5) = (-25) \cdot (-1)$.
Diese Möglichkeiten führen zu den Lösungen: der jeweils erste Faktor ist nämlich $(x - 5)$ und der zweite $(y - 5)$.
Damit lauten die vier Lösungstupel: (6,30), (10,10), (0,0), (-20, 4); die richtige Antwort ist A.

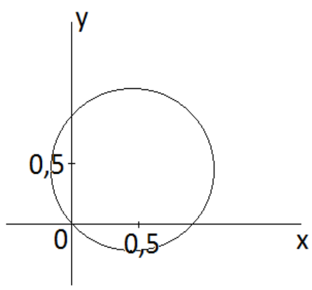
22. f hat eine Periode von 5, damit gilt, dass $f(x+5) = f(x)$.
Also gilt: $f(2013) = f(2008) = f(2003) = \ldots = f(3) = f(-2)$.
Für $x = -2$ lautet der Funktionswert aber $f(-2) = (-2)^2 = 4$; damit ist D richtig.

23. Am besten nimmt man sich einen Tonklumpen und probiert das Ganze dort aus. Beim Känguru-Test war das leider nicht erlaubt und daher musste man dieses Problem durch Nachdenken oder besser durch Zeichnen lösen. Nach Einzeichnen von drei bis vier Ebenen erkennt man langsam die Struktur des Oktaeders, der den Mittelpunkt des Würfels enthält.
Weitere Überlegung: jede Seitenfläche des Würfels wird viermal mit Flächen, die die Diagonale der Seitenfläche enthalten, geschnitten. Daher bleibt bei jeder Seitenfläche nur der Mittelpunkt ‚übrig‘. Die entstehende Figur besitzt also 6 Eckpunkte: Diese Eigenschaft hat von den angegebenen Körpern nur das Oktaeder: Antwort A ist korrekt.



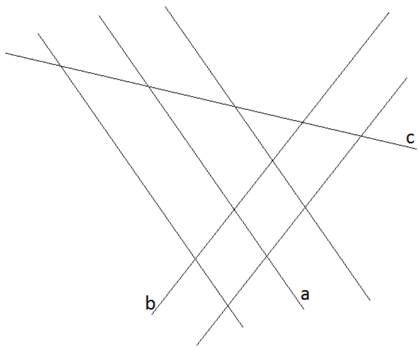


24. Beschränkt man sich für x und y zunächst nur einmal auf positive Werte, kann man die „unsympathischen“ Betragszeichen weglassen und die Gleichung hat die Form $x^2 + y^2 = x + y$. Durch einfaches Umformen erhält man daraus die Gleichung $(x - 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 = 0{,}5$. Einem geübten Auge ist diese Gleichung sofort als Kreisgleichung geläufig, und zwar mit Mittelpunkt in $(0{,}5|0{,}5)$ und $r^2 = 0{,}5$. Im ersten Quadranten, wo x und y beide positiv sind, gibt es unendlich viele Punkte als Zahlenpaare (x,y), die die Gleichung erfüllen; also ist Antwort E die gesuchte.



25. $f^{2013}(n) = 1$ schlüsseln wir einfach nach und nach auf:
$f^{2013}(n) = f(f^{2012}(n)) = 1$. Falls $f^{2012}(n)$ gerade war, gilt $f^{2012}(n) = 2$, da für gerade n $f(n) = n/2$. Falls $f^{2012}(n)$ ungerade war, gilt $f^{2012}(n) = 3$, da für gerade n $f(n) = (n – 1)/2$. $f^{2012}(n)$ kann also 2 oder 3 sein, um die ursprüngliche Gleichung zu erfüllen. Jetzt geht es weiter, die neuen, um eine Stufe reduzierten Gleichungen lauten:
$\boxed{f^{2012}(n) = 2}$ (1) und $\boxed{f^{2012}(n) = 3}$ (2)
Gleichung (1) lautet aufgeschlüsselt: $f^{2012}(n) = f(f^{2011}(n)) = 2$. $f^{2011}(n)$ kann 4 oder 5 sein, um sie zu erfüllen.
Gleichung (2) lautet aufgeschlüsselt: $f^{2012}(n) = f(f^{2011}(n)) = 3$. $f^{2011}(n)$ kann 6 oder 7 sein, um sie zu erfüllen.
Die vier neuen, um eine Stufe reduzierten Gleichungen lauten:
$\boxed{f^{2011}(n) = 4}$ (3) und $\boxed{f^{2011}(n) = 5}$ (4) und $\boxed{f^{2011}(n) = 6}$ (5) und $\boxed{f^{2011}(n) = 7}$ (6)
Nach demselben Ablauf wie oben ergeben sich für $f^{2010}(n)$ die möglichen Werte 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, also 8 Stück. Damit ist das Aufgabenschema klar: Pro Stufe, in der jeweils eine Verschachtelung abgearbeitet wird, verdoppelt sich die Zahl der Lösungen. Da die Funktion f insgesamt 2013-mal auf n angewandt wird, vordoppelt sich die Anzahl der Lösungen von ursprünglich 1 auf 2^{2013}; also ist D die richtige Lösung.

26. Durch ein wenig Herumprobieren kommt man auf die einzige Möglichkeit, wie a, b und c liegen können: a besitzt zwei Parallelen, b eine und c ist zu keiner der anderen Geraden parallel (vgl. Abb.).
Damit scheidet c die anderen Geraden in fünf Punkten und insgesamt wurden sechs Geraden in der Ebene gezeichnet. Es stimmt daher Antwort C.



27. Man kann diese Aufgabe natürlich auch durch Herumprobieren lösen und hat die Lösung nach nicht allzu langer Zeit gefunden. Schöner ist aber folgende Überlegung: Die Summe S(n) der ersten n positiven Zahlen war ja auch schon dem kleinen Gauß bekannt; der hat für sie – so sagt es zumindest die Legende – die Formel $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ hergeleitet. Anhand dieser Formel sieht man auch schnell, dass n nicht allzu groß werden kann, damit S(n) noch unter 1000 liegt. n = 50 etwa ist schon zu groß. Nun ist jede dreiziffrige Zahl mit 3 gleichen Ziffern ein Vielfaches von 111; 111 hat aber in der Primfaktorzerlegung 37, somit steckt in jeder dreiziffrigen Zahl der Form xxx der Faktor 37. Damit gilt jetzt die Beziehung $\frac{n(n+1)}{2} = 37m$.
Es gibt jetzt nur noch zwei Möglichkeiten: Entweder gilt n = 37 oder n + 1 = 37.
Wenn n = 37, liefert S(n) = 703, Fehlschlag. Wenn n + 1 = 37, liefert S(n) = 666, Bingo. Damit ist n = 36 und dessen Ziffernsumme ist 9 (Antwort B).

28. Es gibt vier Situationen:
(1) Angenommen, beide waren Ehrliche. Dann antwortet der Größere mit JA und der kleinere mit JA.
(2) Angenommen, beide waren Lügner. Dann antwortet der Größere mit JA und der kleinere mit JA.
(3) Angenommen, der Größere war ehrlich und der Kleinere ein Lügner. Dann antwortet der Größere mit NEIN und der Kleinere auch mit NEIN.
(4) Angenommen, der Größere war ein Lügner und der Kleinere ehrlich. Dann antwortet der Größere mit JA und der Kleinere mit NEIN.
Bei (3) hätte der Fragensteller sofort nach der ersten Antwort schließen können, wer von den beiden von welchem Typ ist, denn nur in dieser Konstellation gibt es zuerst ein NEIN. Da der Fragensteller nach der ersten Antwort aber noch nichts sagen kann, kann es sich nicht um die Situation (3) handeln. Da der Fragensteller aber nach der zweiten Antwort weiß, von welchem Typ die beiden sind, kann es sich nur um Situation (4) handeln, denn bei (1) und (2) kann der Fragensteller auch nach der zweiten Antwort noch nicht entscheiden, ob (1) oder (2) vorliegt. Es stimmt also Antwort D.

29. Julian muss seinen Algorithmus nur einige Male anwenden:
$a_2 = a_1 + a_1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.
$a_4 = a_2 + a_2 + 2 \cdot 2 = 3 + 3 + 4 = 10$.
$a_8 = a_4 + a_4 + 4 \cdot 4 = 10 + 10 + 16 = 36$.
$a_{16} = a_8 + a_8 + 8 \cdot 8 = 36 + 36 + 64 = 136$.
$a_{32} = a_{16} + a_{16} + 16 \cdot 16 = 136 + 136 + 256 = 528$.
$a_{64} = a_{32} + a_{32} + 32 \cdot 32 = 528 + 528 + 1024 = 2080$.
$a_{96} = a_{64} + a_{32} + 64 \cdot 32 = 2080 + 528 + 2048 = 4656$.
$a_{100} = a_{96} + a_4 + 96 \cdot 4 = 4656 + 10 + 384 = 5050$, Antwort E.
Übrigens: Wer die Herausforderung mag, kann zeigen, dass es sich bei a_n um nichts anderes handelt als die Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen, siehe Aufgabe 27. Dann ist die Aufgabe 29 rechentechnisch ein Klacks.

30. Die fünf Autos, nennen wir sie A, B, C, D, E, müssen alle an einer anderen Stelle ausfahren als sie eingefahren sind und jedem der Autos gehört eine eigene Ausfahrt. Mathematisch betrachtet, sucht man die Anzahl aller „fixpunktfreien Permutationen“ von 5 Elementen. Hat man das erkannt, dann weiß man auch, dass diese Anzahl mit der Subfakultät von 5 berechnet werden kann, kurz $!5$. Und dann weiß man natürlich auch die Formel für $!5$: $!5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44$.
Spaß beiseite. Am einfachsten ist es wirklich, die Anzahl der Möglichkeiten durch Anschreiben zu erhalten. Wie viele Möglichkeiten gibt es die Buchstaben A, B, C, D, E anzuschreiben, damit A nicht an der ersten Stelle, B nicht an der zweiten Stelle usw. steht: BAECD, BADEC, BCAED, BCEAD, …
Es sollen hier nicht alle Lösungen angeschrieben werden. Es ergeben sich 44; die Lösung B ist richtig.
P.S.: Eine anschauliche grafische Lösung für dieselbe Herausforderung mit 4 Einfahrten ist bei den Lösungen für KADETT zu finden (Aufgabe 30).