KÄNGURU DER MATHEMATIK 2013
21.3.2013

Kategorie: Student, ab 11. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Stadtgemeinde Pressbaum

pwc

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

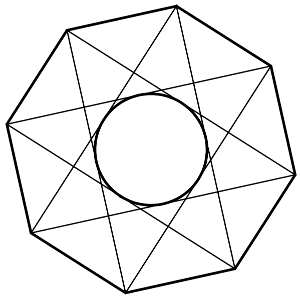
Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2013“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2015 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung: Vor- und Zuname des Teilnehmers sowie des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat, Schulstufe und Schule (genaue Adresse), Jahr des Wettbewerbs. Nach dem 31. Dezember 2015 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welche der folgenden Zahlen ist am größten?
(A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$



2. Das abgebildete regelmäßige Achteck hat Seiten der Länge 10. Ein Kreis berührt alle eingezeichneten Diagonalen dieses Achtecks. Wie groß ist der Radius dieses Kreises?
(A) 10 (B) 7,5 (C) 5 (D) 2,5 (E) 2

3. Die Oberfläche eines Prismas besteht aus 2013 Flächen. Wie viele Kanten hat das Prisma?
(A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033

4. Welchen Wert hat die dritte Wurzel von 3^{3^3}? (Beachte: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)
(A) 3^3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} (D) 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

5. Die Jahreszahl 2013 ist aus den vier aufeinanderfolgenden Ziffern 0, 1, 2, 3 aufgebaut. Wie viele Jahre vor dem Jahr 2013 war die Jahreszahl zum letzten Mal aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern aufgebaut?
(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

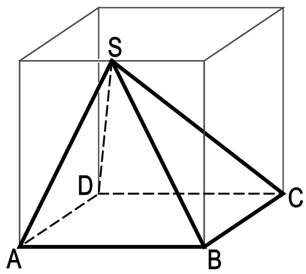
6. Es sei f eine lineare Funktion, für die $f(2013) - f(2001) = 100$ gilt. Wie groß ist der Wert von $f(2031) - f(2013)$?
(A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

7. Wir wissen, dass die Beziehung $2 < x < 3$ für eine Zahl x gilt. Wie viele der folgenden Aussagen sind in diesem Fall richtig?

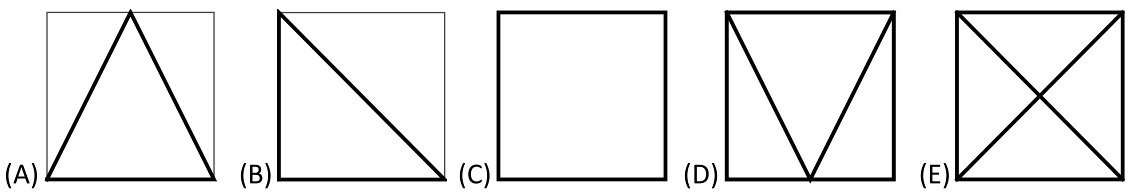
$4 < x^2 < 9$ $\quad 4 < 2x < 9$ $\quad 6 < 3x < 9$ $\quad 0 < x^2 - 2x < 3$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Jeder von sechs einsamen Helden hat Bösewichte gefangen. Insgesamt haben sie 20 Bösewichte erwischt: der erste Held einen Bösewicht, der zweite Held zwei Bösewichte, der dritte Held drei Bösewichte. Der vierte Held hat mehr Bösewichte gefangen als jeder andere Held. Bestimme die kleinste Anzahl von Bösewichten, die der vierte Held gefangen hat, bei der dies möglich ist.
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

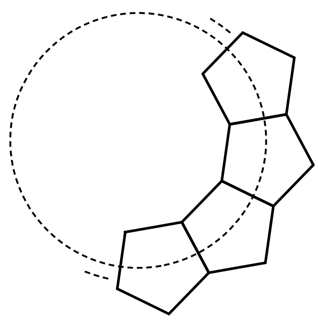


9. Im Inneren des abgebildeten Würfelgitters sieht man eine feste, nicht durchsichtige Pyramide $ABCDS$ mit Basisquadrat $ABCD$, deren Spitze S genau im Mittelpunkt einer Würfelkante liegt. Man betrachtet diese Pyramide von oben, von unten, von vorne, von hinten, von rechts und von links. Welche der folgenden Ansichten kann dabei nicht entstehen?



10. Schmilzt eine bestimmte Substanz, vergrößert sich ihr Volumen um $\frac{1}{12}$.
Um welchen Anteil verkleinert sich das Volumen, wenn die Substanz sich wieder verfestigt?
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

- 4 Punkte Beispiele -

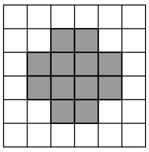
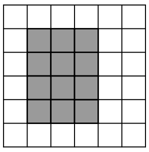
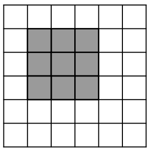
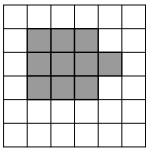
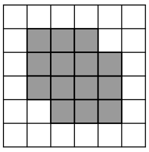


11. Ralf hat lauter gleich große Plastikplättchen in der Form eines regelmäßigen Fünfecks. Er klebt sie längs der Seiten zu einem vollständigen Ring zusammen (siehe Abbildung). Aus wie vielen Plättchen besteht dieser Ring?
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

12. Wie viele positive ganze Zahlen n gibt es mit der Eigenschaft, dass sowohl $\frac{n}{3}$ als auch $3n$ dreiziffrige ganze Zahlen sind?

(A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

13. Ein kreisrunder Teppich wird auf einen Boden gelegt, auf dem gleich große quadratische Fliesen verlegt sind. Alle Fliesen, die mindestens einen Punkt mit dem Teppich gemeinsam haben, werden grau gefärbt. Welches der abgebildeten Ergebnisse kann dabei nicht vorkommen?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

14. Wir betrachten die folgende Aussage über eine für alle ganzen Zahlen x definierte Funktion $f: Z \to Z$: "Für jedes gerade x ist $f(x)$ gerade." Wie lautet die Verneinung (Negation) dieser Aussage?

(A) Für jedes gerade x ist $f(x)$ ungerade.

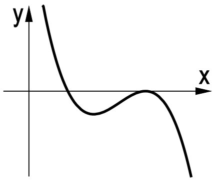
(B) Für jedes ungerade x ist $f(x)$ gerade.

(C) Für jedes ungerade x ist $f(x)$ ungerade.

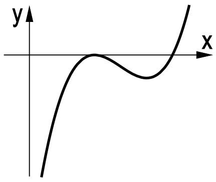
(D) Es existiert eine gerade Zahl x, für die $f(x)$ ungerade ist.

(E) Es existiert eine ungerade Zahl x, für die $f(x)$ ungerade ist.

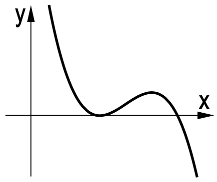
15. Unter den unten abgebildeten Graphen befindet sich auch der Graph der Funktion $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ mit $a < b$. Welcher ist es?



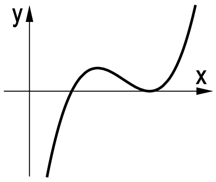
(A)



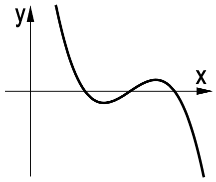
(B)



(C)



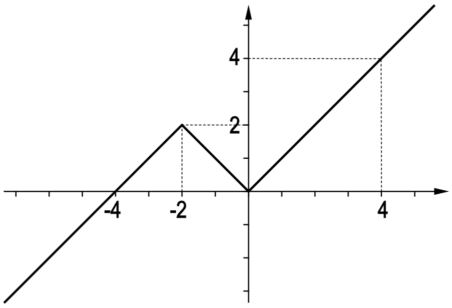
(D)



(E)

16. Wir betrachten Rechtecke, bei denen eine Seite 5,0 cm lang ist. Unter ihnen gibt es welche, die man so zerschneiden kann, dass man ein Quadrat und ein Rechteck erhält, wobei einer der beiden Teile den Flächeninhalt 4,0 cm^2 hat. Wie viele derartige Rechtecke gibt es?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



17. Peter hat den Graph einer Funktion $f: R \to R$ gezeichnet, der wie in der Abbildung angedeutet aus zwei Strahlen und einer Strecke besteht. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $f(f(f(x))) = 0$?

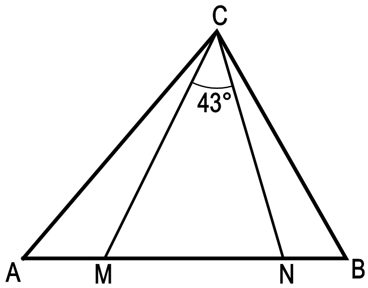
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

18. Wie viele Paare positiver ganzer Zahlen (x, y) lösen die Gleichung $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) Eine andere Zahl.

19. In einer Schachtel befinden sich 900 Karten, die von 100 bis 999 nummeriert sind. Auf zwei verschiedenen Karten stehen immer verschiedene Zahlen. Franz zieht einige Karten und bestimmt von jeder die Ziffernsumme. Wie viele Karten muss er mindestens ziehen, damit er unter den gezogenen sicher drei mit derselben Ziffernsumme hat?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55



20. Im Dreieck ABC liegen die Punkte M und N auf der Seite AB so, dass AN = AC und BM = BC gilt. Bestimme $\angle$ACB, wenn $\angle$MCN = 43° gilt.

(A) 86° (B) 89° (C) 90° (D) 92° (E) 94°

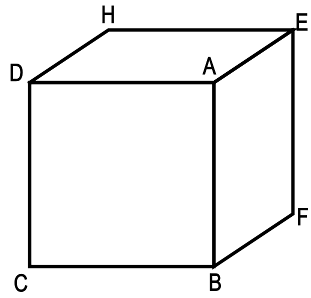
- 5 Punkte Beispiele -

21. Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen gibt es mit $x \le y$, sodass ihr Produkt genau das Fünffache ihrer Summe ist?

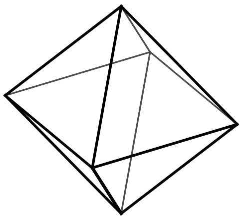
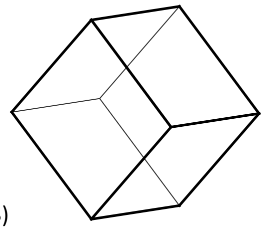
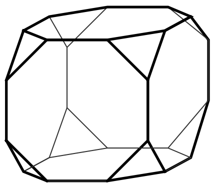
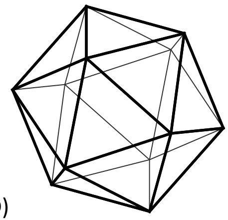
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Die Funktion $f: R \to R$ ist durch folgende Eigenschaften definiert:
f ist periodisch mit der Periode 5, und für $-3 \le x < 2$ gilt $f(x) = x^2$. Wie groß ist $f(2013)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9



23. Der abgebildete Würfel wird mit einer Ebene geschnitten, die durch die drei zu A benachbarten Eckpunkte D, E und B geht. Auf ähnliche Weise wird der Würfel auch mit jenen Ebenen geschnitten, die jeweils durch die drei benachbarten Punkte aller sieben weiteren Eckpunkte gehen. Diese Ebenen zerteilen den Würfel in mehrere Stücke. Wie sieht das Stück aus, das den Würfelmittelpunkt enthält?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

(E) Der Würfelmittelpunkt gehört zu mehreren Teilen.

24. Wie viele Lösungen (x, y) mit reellen x und y hat die Gleichung $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

(A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) unendlich viele

25. Es sei $f: N \to N$ die Funktion, die durch $f(n) = \frac{n}{2}$ für gerade n, und durch $f(n) = \frac{n-1}{2}$ für ungerade n definiert ist. Ist k eine positive ganze Zahl, so bezeichne $f^k(n)$ den Ausdruck $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, in dem k-mal das f auftritt. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f^{2013}(n) = 1$ ist

(A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} (D) 2^{2013} (E) unendlich

26. In der Ebene werden einige Geraden gezeichnet. Die Gerade a schneidet genau drei andere Geraden und die Gerade b schneidet genau vier andere Geraden. Die Gerade c schneidet genau n andere Geraden, mit $n \neq 3, 4$. Wie viele Geraden wurden in der Ebene gezeichnet?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) eine andere Anzahl

27. Addiert man die ersten n positiven ganzen Zahlen, so erhält man eine dreiziffrige Zahl mit lauter gleichen Ziffern. Wie groß ist die Ziffernsumme von n?

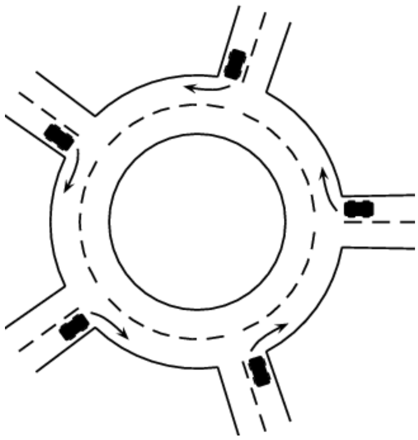
(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

28. Auf einer Insel wohnen nur Ehrliche (die immer die Wahrheit sagen) und Lügner (die niemals die Wahrheit sagen). Ich traf dort zwei Einwohner und fragte den größeren, ob sie beide Ehrliche seien. Er antwortete, aber ich konnte aus seiner Antwort nicht schließen, zu welcher Gruppe sie gehörten. Also fragte ich auch den kleineren, ob der größere ein Ehrlicher sei. Er antwortete, und danach wusste ich, von welchem Typ die beiden waren. Welche Aussage ist richtig?

(A) Beide waren Ehrliche.
(B) Beide waren Lügner.
(C) Der größere war ein Ehrlicher und der kleinere ein Lügner.
(D) Der größere war ein Lügner und der kleinere ein Ehrlicher.
(E) Es ist nicht genug Information gegeben, um eindeutig entscheiden zu können.

29. Julian hat einen Algorithmus geschrieben, um eine Zahlenfolge zu bilden. Es gilt $a_1 = 1$ und $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ für alle positiven ganzen Zahlen m und n. Bestimme den Wert von a_{100}.

(A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050



30. In einen Kreisverkehr fahren gleichzeitig fünf Autos ein (siehe Bild). Jedes Auto verlässt den Kreisverkehr nach weniger als einer Runde, und an jeder Ausfahrt fährt genau ein Auto ab. Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es, wie die Autos den Kreisverkehr verlassen können?

(A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120