

Känguru der Mathematik 2013

Gruppe Junior (9./10. Schulstufe)

Österreich - 21.3.2013

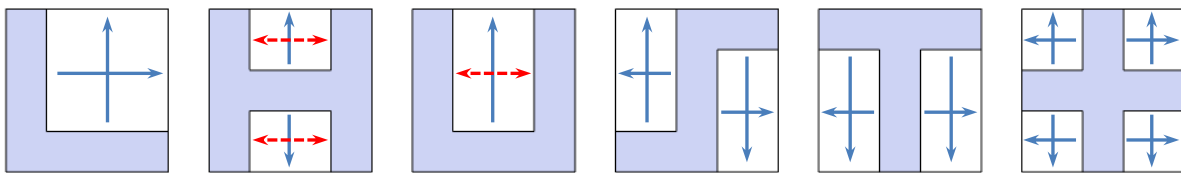


LÖSUNGEN

- 3 Punkte Beispiele -

1. $200\ 013 - 2\ 013 = 198\ 000$. Aus den (hoffentlich) bekannten Teilbarkeitsregeln folgt, dass die Zahlen 2, 3 und 5 auf alle Fälle Teiler sein müssen. Entweder kennt man nun auch die Teilbarkeitsregel für 11 oder kann durch Probieren 7 als Teiler ausschließen. – Antwort D ist richtig.

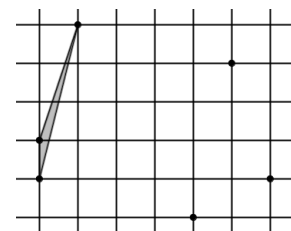
2. Die Figuren besitzen genau dann gleichen Umfang wie das Quadrat, wenn sie nur durch ‚Verschieben‘ von Kanteanteilen entstanden sind. Dies ist bei der ersten, bei der vierten, bei der fünften und bei der sechsten Figur der Fall – also viermal und somit ist Antwort C richtig! Die „zulässigen“ Kanten-Verschiebungen siehst du in der Abbildung unterhalb angedeutet (blaue Pfeile). Rote (strichlierte) Pfeile kennzeichnen „überschüssige“ Kanten in Figuren, deren Umfang größer ist als der des quadratischen Blattes selbst:



3. Frau Maisl kauft also 16 Maiskolben, muss aber nur 14 Maiskolben bezahlen; daher zahlt sie 2,80 € und Antwort C ist richtig.

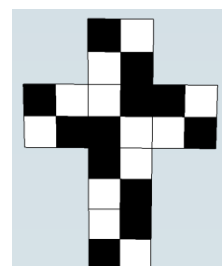
4. Man erkennt sehr schnell, dass es sich nur um die Zahlen 2, 4 und 125 handeln kann; daher ist die Summe dieser drei Zahlen 131. Wiederum ist Antwort C richtig.

5. Verbindet man drei Punkte zu einem Dreieck, berechnet sich der Flächeninhalt nach der Formel $A = \frac{a \cdot h}{2}$. Der kleinstmögliche Flächeninhalt ergibt sich also für die kleinstmöglichen Werte für a und h . Bei der in der Grafik skizzierten Lösung gilt $a = 1$ bzw. $h = 1$. Kleiner geht's nicht! – Antwort A ist richtig.



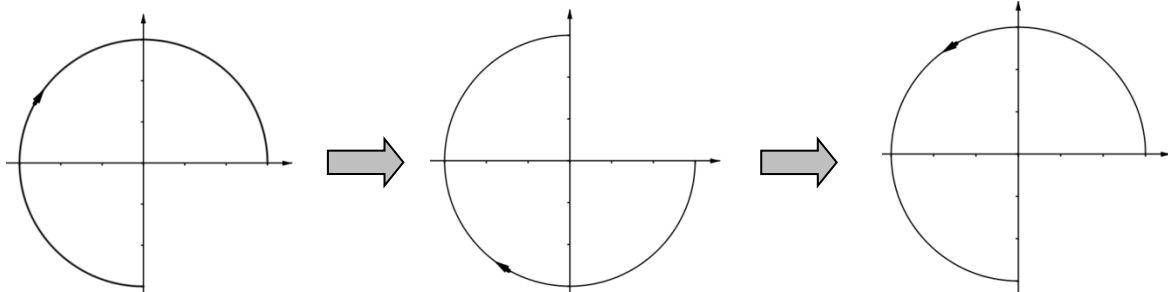
6. Hier ist ein wenig Potenzrechnen angesagt: $4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$. Antwort E ist also richtig.

7. Hilfreich wäre hier natürlich, sich ein Modell zu basteln. Das ist aber mit den erlaubten Hilfsmitteln wohl kaum möglich. Man schafft es aber sicherlich mit ein wenig Vorstellungsvermögen, sich das bemalte Netz des Würfels zu basteln, indem man es sich aufzeichnet (Kästchen für Kästchen). Antwort E ist richtig.



8. Die Zahl n ist 249, denn dies ist die größte natürliche Zahl, bei der noch gilt, dass $4n$ dreistellig ist, denn $4 \cdot 249 = 996$, aber $4 \cdot 250 = 1\,000$. Die Zahl m muss 25 sein ($4 \cdot 25 = 100$), denn dies ist die kleinste natürliche Zahl, bei der $4m$ dreistellig ist. Die Differenz $4n - 4m$ beträgt also 896. – Antwort C ist richtig.

9. Bei dieser Aufgabe empfiehlt es sich, sie über eine schnelle Skizze zu lösen! – Antwort D ist richtig.



10. Diese Aufgabe erfordert ein wenig Wissen im Umgang mit Wurzeln und/oder das schnelle näherungsweise Berechnen ebendieser: Durch Überlegungen kann man leicht feststellen, dass aus A – C die Zahl C die größte sein muss (durch das Wurzelziehen werden Zahlen kleiner, also ist das Produkt das größte, bei der der größte Faktor übrig bleibt); wir berechnen uns dieses Ergebnis näherungsweise: $20 \cdot \sqrt{13} \sim 20 \cdot 3,5 = 70$, da aus $9 < 13 < 16$ folgt, dass $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$, gilt $3 < \sqrt{13} < 4$.

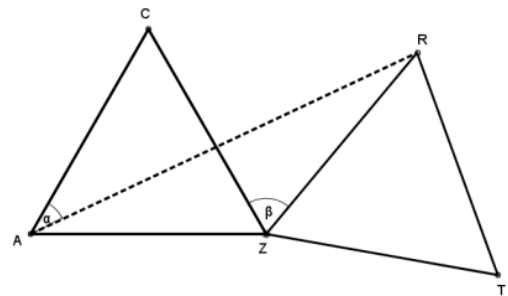
Möglichkeit D: $\sqrt{201} \sim \sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = \sqrt{2} \cdot 10 \sim 14$ und $14 \cdot 3 = 42$

Möglichkeit E: $\sqrt{2013} \sim \sqrt{2000} = \sqrt{20 \cdot 100} = \sqrt{20} \cdot 10 \sim 4,5 \cdot 10 = 45$

Daher ist Antwort C richtig. – Auch das näherungsweise Lösen genügt hier, da die Ergebnisse sehr voneinander abweichen!

- 4 Punkte Beispiele -

11. Da das Dreieck AZC ein gleichseitiges Dreieck ist, gilt für den Winkel $\angle AZC = 60^\circ$ und somit für $\angle AZR = 130^\circ$. Das Dreieck AZR ist gleichschenkelig; daraus folgt, dass $\angle RAZ = \angle ZRA = 25^\circ$ (Winkelsumme im Dreieck). Da wiederum $\angle ZAC = 60^\circ$, folgt $\angle RAC = \alpha = 35^\circ$. Somit ist Antwort D richtig.



12. Egal, wie viele Quadrate man anfügt, der Umfang wächst jeweils um 2 cm. Bei einem Quadrat beträgt der Umfang 4 cm, bei 2 Quadraten dann 6 cm ... bei 6 Quadraten 14 cm, bei 7 Quadraten 16 cm usw.

Als Formel ergibt sich dafür $u = (n + 1) \cdot 2$, wobei n die Anzahl der Quadrate angibt. Für $n = 2013$ ergibt sich für den Umfang der Zickzackfigur $u = 4028$ cm (Antwort B).

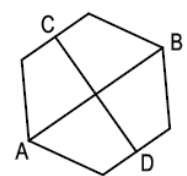


13. Ein regelmäßiges Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken; hier hat ein solches Dreieck einen Flächeninhalt von 10.

Durch eine Skizze bzw. durch Kennen der Formel kann man sich überlegen, dass für so ein

Dreieck gilt: $A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{A}$ bzw. $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{3}$. Da für die Strecken $\overline{AB} = 2a$

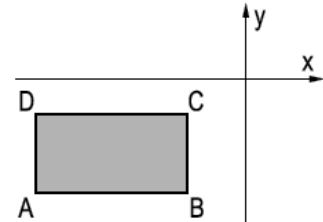
und $\overline{CD} = 2h$ gilt, folgt daraus $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{A} \cdot 2 \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot A = 80$. – Antwort D ist richtig.



14. Jeder Knabe erreicht drei Punkte mehr. Wären alles Knaben, würde der Punktedurchschnitt gesamt um 3 Punkte steigen, da jeder der Teilnehmer ja 3 Punkte mehr erreichen würde. Der Schnitt steigt aber nur um 1,2 Punkte, das sind 40 % von den drei Punkten. Daraus folgt, dass auch nur 40 % der Teilnehmer Knaben sind (der Durchschnitt ist linear ...). Daher sind 60 % der Kinder Mädchen und somit ist Antwort D richtig.

15. Das Zuweisen konkreter (und realistischer) Koordinaten für die Punkte ABCD (vgl. Abb.) und dem Berechnen des angeführten Bruches führt hier sicher am schnellsten zum richtigen Ergebnis (D). Betrachten wir diese Aufgabe trotzdem auch allgemein:

Es ist hilfreich, sich zunächst zu überlegen, dass das Rechteck ABCD vollständig im 3. Quadranten liegt. Für Punkte, die darin liegen gilt, dass die x-Koordinate und die y-Koordinate immer negativ ($x < 0$, $y < 0$) sind. Folglich ist auch für die Eckpunkte des Rechtecks der Bruch $\frac{y\text{-Koordinate}}{x\text{-Koordinate}}$ sicherlich positiv; Wann wird dieser Bruch nun am kleinsten? Folgendes muss gelten:



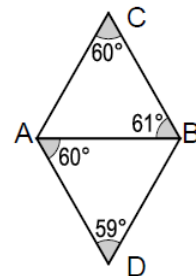
y-Koordinate (= Zähler): Muss vom Betrag her möglichst klein werden, als (negative) Zahl daher möglichst groß (Punkt möglichst weit „oben“ im Koordinaten-System).

x-Koordinate (= Nenner): Muss vom Betrag her möglichst groß werden, als (negative) Zahl daher möglichst klein (Punkt möglichst weit „links“ im Koordinaten-System).

Gesucht ist also der Punkt, der zugleich möglichst „hoch“ und möglichst weit „links“ liegt, dies ist der Punkt D und somit ist auch Antwort D richtig.

16. Das Produkt beider Alter ergibt 2013, daher müssen die Alter von Hans und seinem Sohn Teiler von 2013 sein. Dies ist nur für Antwort A der Fall: Wenn Hans 1952 geboren ist, wird er heute 61 Jahre alt, daher ist heute sein Alter ein Teiler von 2013 ($61 \cdot 33 = 2013$).

17. Nehmen wir einmal an, AB habe die Länge 1. Dann lassen sich mit dem Sinussatz alle restlichen „Rhombenlängen“ durch AB ausdrücken – wir können uns ja über die Winkelsumme im Dreieck (180°) alle weiteren Winkel bestimmen. Damit wir allerdings nicht so viel probieren müssen, noch eine einfache Tatsache im Dreieck: dem größten Winkel liegt die längste Seite gegenüber. Daher sind die potenziellen Kandidaten für die längste Seite AC (gegenüber von $\angle ABC = 61^\circ$) und AD (gegenüber von Winkel $\angle ABD = 61^\circ$). Das Umformen entsprechender Anwendungen des Sinussatzes liefert



$$AC = \frac{\sin(61^\circ)}{\sin(60^\circ)} \cdot 1 \quad \text{bzw.} \quad AD = \frac{\sin(61^\circ)}{\sin(59^\circ)} \cdot 1.$$

Die beiden Ausdrücke unterscheiden sich lediglich durch die Sinusterme im Nenner. Die Sinusfunktion ist im Intervall $[0^\circ, 90^\circ[$ streng monoton steigend, daher gilt $\sin(60^\circ) > \sin(59^\circ)$ und $AD > AC$. Damit ist AD die längste Seite in der Figur, Antwort A ist korrekt.

P.S.: Diese Antwort ist freilich unabhängig von der Seitenlänge AB: $AC = \frac{\sin(61^\circ)}{\sin(60^\circ)} \cdot AB < \frac{\sin(61^\circ)}{\sin(59^\circ)} \cdot AB = AD$.

Wer beim Lösen dieser Aufgabe mit dem Wissen aus der Unterstufe auskommen will, argumentiert so: Nach dem Ergänzen der zwei fehlenden Winkel ist klar, dass die Dreiecke BAD und BCA ähnlich zueinander sind. Die längste Seite im „unteren“ Dreieck ist AD, die längste im „oberen“ AC, da sie ja auch dem größten Winkel (61°) gegenüberliegen. Da aber die den beiden Dreiecken gemeinsame Seite AB die kürzeste Seite im „unteren“ Dreieck darstellt (liegt gegenüber des kleinsten Winkels von 59° bei D), aber gleichzeitig die zweitlängste Seite im „oberen“ Dreieck ist (liegt gegenüber des zweitgrößten Winkels von 60° bei C), stellt das „obere“ Dreieck eine (maßstabgetreue) Verkleinerung des „unteren“ Dreiecks dar. Somit gilt: $AD > AC$ (Antwort A).

18. Fünf aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen – schreiben wir diese Zahlen folgendermaßen an: $a, (a + 1), (a + 2), (a + 3), (a + 4)$. Durch leichtes Ausprobieren erhält man sofort die gesuchte Lösung: aus $a + (a + 1) + (a + 2) = (a + 3) + (a + 4)$ erhält man $a = 4$; aus $a + (a + 1) + (a + 3) = (a + 2) + (a + 4)$ folgt $a = 2$. Da keine weiteren Kombinationen auf die geforderte Anforderung zutreffen, ist Antwort C richtig.

19. Auch diese Aufgabe löst man am schnellsten sicherlich durch reines Ausprobieren: Es gibt 12 Möglichkeiten und daher ist Antwort D richtig.

20. Okay, wir arbeiten anhand des Ausschlussprinzips: Antwort A geht nicht, denn falls zwei oder vier gerade Ziffern vorkommen würden, wäre das Ziffernprodukt sicherlich auch gerade (durch 2 teilbar). Antwort B kann ausgeschlossen werden, denn schon die Zahl 111 111 erfüllt beide Bedingungen. Antwort C kann auch nicht stimmen, da sonst die Ziffernsumme sicher ungerade ist. Antwort D: In der Zahl darf keine gerade Ziffer vorkommen (dann wäre ja das Ziffernprodukt immer gerade). Daher müssen alle sechs Ziffern ungerade sein. Da es aber nur 5 ungerade Ziffern gibt, kann Antwort D auch nicht stimmen, bleibt also nur Antwort E als richtige Antwort übrig.

- 5 Punkte Beispiele -

21. Zunächst einmal sollte man im Nenner die Zahl $1024 \times 1000 = 2^{10} \times 1000$ erkennen.

Nun kann man für die ersten Zweierpotenzen die Nachkommastellenentwicklung studieren:

$$\frac{1}{2} = 0,5. \quad \frac{1}{2^2} = 0,25. \quad \frac{1}{2^3} = 0,125. \quad \frac{1}{2^4} = 0,0625. \dots$$

Man sieht, dass pro steigenden Exponenten eine Nachkommastelle hinzukommt. Damit hat $\frac{1}{2^{10}}$ allein 10

Nachkommastellen. Nachträgliche Division durch 1000 ergibt zusätzliche 3 Kommastellen, was auf Antwort C, 13 Nachkommastellen, führt.

22. In diesem Jahrtausend ist 2013 die kleinste Jahreszahl, die sich aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern aufbauen lässt. Daher lag die letzte Jahreszahl, die dieselbe Eigenschaft besitzt, sicherlich im alten Jahrtausend und war 1432. Die Differenz zwischen diesen beiden Jahren beträgt 581, damit ist Antwort C richtig.

P.S.: Weitere Jahreszahlen mit demselben Bildungsprinzip waren im letzten Jahrtausend auch noch 1023, 1032, 1203, 1230, 1234, 1243, 1302, 1320, 1324, 1342, 1423;

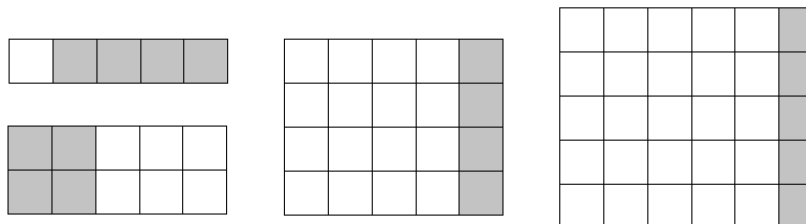
23. Damit bei einem Rechteck überhaupt erst einmal die Fläche von 4 cm^2 bei einer Länge von 5 cm zustande kommt, muss die Breite mindestens 0,8 cm betragen. Dann ist das ganze Rechteck 4 cm^2 groß.

Vergrößert man die Breite ein wenig, wächst die Gesamtfläche über 4 cm^2 hinaus und irgendwann ist beim $5 \times 1 \text{ cm}^2$ -Rechteck durch Zerschneiden ein $1 \times 1 \text{ cm}^2$ -Quadrat und ein $4 \times 1 \text{ cm}^2$ -Rechteck möglich.

Wächst die Breite auf 2 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein $2 \times 2 \text{ cm}^2$ -Quadrat und ein $3 \times 2 \text{ cm}^2$ -Rechteck. In diesem Fall ist der 4 cm^2 große Flächenteil das Quadrat selbst.

Wächst die Breite auf 4 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein $4 \times 4 \text{ cm}^2$ -Quadrat und ein $1 \times 4 \text{ cm}^2$ -Rechteck.

Wächst schließlich die Breite auf 5,8 cm, entstehen durch Zerschneiden ein $5 \times 5 \text{ cm}^2$ -Quadrat und ein $0,8 \times 5 \text{ cm}^2$ -Rechteck. Da das $5 \times 5 \text{ cm}^2$ -Quadrat das größtmögliche Quadrat ist, das in einem 5 cm langen Rechteck Platz findet, gibt es darüber hinaus keine Möglichkeiten mehr. Daher gibt es 4 derartige Rechtecke, Antwort D.



24. Wie oft bei solchen Aufgaben, ist es am besten, zunächst einmal etwas herumzuprobieren. Aus $\{1, 2, 3\}$ wird durch Summenbildung $\{1+2, 1+3, 2+3\} = \{3, 4, 5\}$. Weiter geht's zu $\{3+4, 3+5, 4+5\} = \{7, 8, 9\}$. Und noch einmal: $\{7+8, 7+9, 8+9\} = \{15, 16, 17\}$. Was man nun erkennt:

(1) Die neuen Mengen bestehen immer aus drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen.

(2) Die mittlere Zahl ist immer eine Zweierpotenz.

Das allgemein zu zeigen, ist nicht schwer. Angenommen, schon die Startmenge hat die Eigenschaften (1) & (2).

In unserem Fall ist das mit $\{1, 2, 3\}$ natürlich so.

Dann hat die Startmenge die Form $\{2^n - 1, 2^n, 2^n + 1\}$.

Anwenden der Summenänderung führt auf $\{2^n - 1 + 2^n, 2^n - 1 + 2^n + 1, 2^n + 2^n + 1\} = \{2^{n+1} - 1, 2^{n+1}, 2^{n+1} + 1\}$: Die drei Elemente der Menge bleiben benachbarte Zahlen und in der Mitte steht die nächsthöhere Zweierpotenz.

Nun sind die 2013 nächstgelegenen Zweierpotenzen $2^{10} = 1024$ und $2^{11} = 2048$ und die zugehörigen Mengen $\{1023, 1024, 1025\}$ und $\{2047, 2048, 2049\}$. Damit kann 2013 nie in so einer Menge auftauchen: Antwort E.

25. Von 1 bis n^2 gibt es n Quadratzahlen und von 1 bis n^3 gibt es n Kubikzahlen. – Beispiel: von 1 bis 5^2 gibt's die Quadratzahlen $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16$ und eben $5^2 = 25$, mehr nicht. Daher: Von 1 bis $2013^6 = (2013^3)^2$ gibt es 2013^3 Quadratzahlen und von 1 bis $2013^6 = (2013^2)^3$ gibt es 2013^2 Kubikzahlen. Es gibt also 2013-mal mehr Quadratzahlen als Kubikzahlen; damit ist die korrekte Antwort A.

26. Die großen Primzahlen 13, 17 und 19 müssen in einem Zähler verstaubt werden, um einen ganzzahligen Bruch zu erzeugen. Wenn sie im Zähler sind, kann b im Nenner nur 1 sein, damit a/b ganzzahlig wird.

$b = 1$ sollte daher Nenner eines Bruchs mit 13, 17 oder 19 als Zähler sein. Damit bleiben aber zwei Zähler ohne brauchbaren Nenner. Diese beiden „unbrauchbaren“ Zahlen, zum Beispiel 17 und 19, sollte man daher beide in einem „Müllbruch“ entsorgen.

Nun kann man schauen, ob die neben $13/1$ restlichen 9 noch verbleibenden Brüche ganzzahlig werden können; und dies ist tatsächlich möglich: Durch systematisches Probieren kommt man relativ schnell auf eine Lösung:

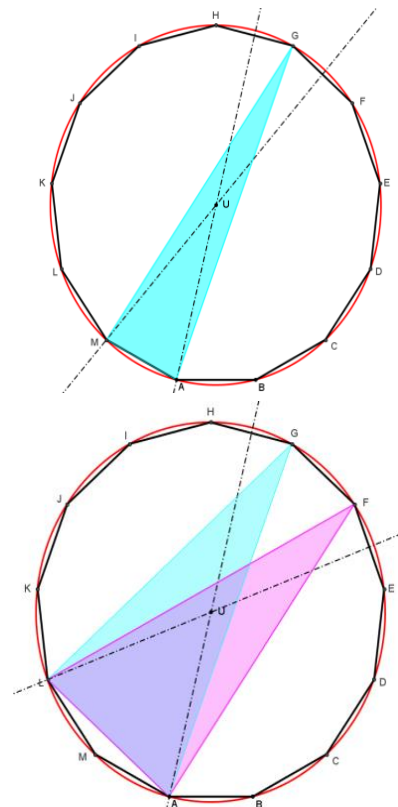
$\frac{22}{11}, \frac{18}{9}, \frac{21}{7}, \frac{16}{8}, \frac{15}{3}, \frac{12}{6}, \frac{14}{2}, \frac{20}{4}, \frac{10}{5}$. Damit gibt es 10 mögliche ganzzahlige Brüche: Antwort B.

27. Vorab: Der Umkreismittelpunkt des 13-Ecks ist der Schnittpunkt zweier Streckensymmetralen des 13-Ecks. Diese Symmetralen bilden zeitgleich eine Symmetrieachse des 13-Ecks.

Nun, wie kommt man aber nun auf die Anzahl der Dreiecke, für die die Bedingung stimmt? Am besten skizziert man sich so ein 13-Eck.

Wählt man zwei Punkte, dann muss der dritte Eckpunkt des Dreiecks zwischen den Symmetrieachsen der beiden ersten Punkte liegen – siehe Abbildungen!

Nun erkennt man auch, dass durch einen Punkt (wie bei der Abbildung für A) die Anzahl der möglichen Dreiecke reihum zuerst ansteigt und dann wieder abnimmt – ergibt für den Eckpunkt A als ersten Eckpunkt der Dreiecke $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ mögliche Dreiecke. Es ist jedoch klar, dass sich diese Anzahl nun drastisch verringert. Für B sind es noch 20 Dreiecke (das Dreieck durch A und B wird nicht doppelt gezählt). Für C sind es nur noch 18 (2 Dreiecke durch A und C und eines durch B und C fallen weg). Für D dann nur noch 15 (3 Dreiecke durch A und D, 2 durch B und D und 1 durch C und D fallen weg). Für E kommen noch 11, für F noch 6 Dreiecke dazu. Aus Symmetriegründen war's das dann auch schon. Das wären dann $21 + 20 + 18 + 15 + 11 + 6 = 91$ Dreiecke. Somit ist Antwort C richtig.



28. Zum Lösen der Aufgabe reicht es, die angegebenen Autos mit ihren Geschwindigkeiten einzeln zu betrachten:

Auto A fährt mit 50 km/h. Nach 100 Stunden hat es $50 \times 100 = 5000$ km zurückgelegt.

Auto B fährt mit 66 km/h. Es hat 16 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 84 Stunden hat es $66 \times 84 = 5544$ km zurückgelegt.

Auto C fährt mit 75 km/h. Es hat 25 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 75 Stunden hat es $75 \times 75 = 5625$ km zurückgelegt.

Auto D fährt mit 84 km/h. Es hat 34 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 66 Stunden hat es $84 \times 66 = 5544$ km zurückgelegt.

Auto E fährt mit 100 km/h. Es hat 50 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 50 Stunden hat es $100 \times 50 = 5000$ km zurückgelegt.

Auto C liegt damit nach 100 Stunden in Front.

29. Symbolisieren wir einmal die ersten 25 von den 100 in einer Reihe stehenden Bäume mit Kreisen und nummerieren sie:

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ...

Da wir möglichst viele Eichen unterbringen wollen, beginnen wir – solange dies die Regel, dass zwischen zwei beliebigen Eichen nicht 5 Bäume stehen dürfen, erlaubt – Eichen (schwarz ausgefüllte Kreise) zu setzen:

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ...

Wir erkennen nun, dass an Position 7 keine Eiche mehr gepflanzt werden darf; sonst würde diese nämlich mit der Eiche an der 1. Stelle genau fünf [beliebige] Bäume einschließen, was ja nicht zugelassen ist. Aus den gleichen Gründen stehen an den Positionen 8 bis 12 keine Eichen, sondern Birken. Setzt man dieses „Pflanzmuster“ fort, so erkennt man, dass immer (die ersten) sechs von 12 aufeinanderfolgenden Bäumen Eichen sind:

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ...

Erste 12er-Reihe
 Zweite 12er-Reihe

Da acht solche 12er-Reihen in eine 100er-Reihe passen ($8 \cdot 12 = 96$), stehen auf jeden Fall bis Position 96 genau $8 \cdot 6 = 48$ Eichen. Ab Position 97 startet unser „Pflanzmuster“ wieder von neuem, weshalb auch an die verbleibenden 4 Stellen (Positionen 97, 98, 99 & 100) Eichen gesetzt werden dürfen. Insgesamt finden daher höchstens $48 + 4 = 52$ Eichen (und 48 Birken) Platz. Antwort B ist die gesuchte.

30. Wie kann N aussehen? Angenommen, die Zahl N ist nicht durch 2 teilbar. Damit die Summe echter Teiler größtmöglich wird, muss N aber durch 3, 5 und 7 teilbar sein. Dann sind die drei größten echten Teiler zusammenaddiert $\frac{N}{3} + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} = \frac{71}{105}N$ groß. Damit ist N aber größer als die Summe und entspricht nicht den Anforderungen der Aufgabe. Daher muss 2 schon einmal ein Teiler von N sein. Angenommen, 2 ist nun ein Teiler von N, aber nicht 3. Dann ist die größtmögliche Summe echter Teiler von N $\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{5} = \frac{19}{20}N$ groß, entspricht also immer noch nicht unseren Anforderungen. Damit sollte neben 2 auch 3 ein Teiler von N sein, damit aber auch 6. Sind 4 und 5 keine Teiler von N, ist die Summe $\frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{6} = N$ groß; N ist damit gerade noch gleich groß wie die Summe seiner drei größten echten Teiler.

Jetzt ist jedoch die Teilerstruktur von N klar: N muss in jedem Fall durch 2 und 3 teilbar sein und zugleich noch entweder durch 4 oder durch 5. In diesen Fällen ist N kleiner als die echte Teilersumme und dadurch, dass 2 und 3 in jedem Fall Teiler von N sind, ist es auch 6, somit ist die richtige Antwort B.