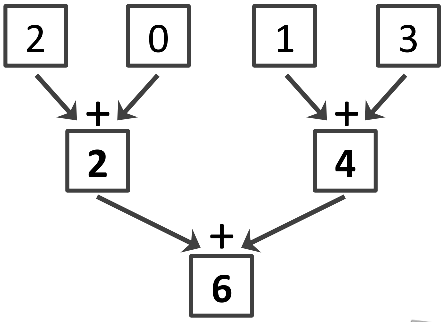
Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Benjamin (5./6. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

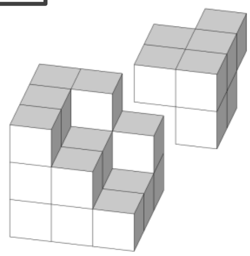
LÖSUNGEN

- 3 Punkte Beispiele -



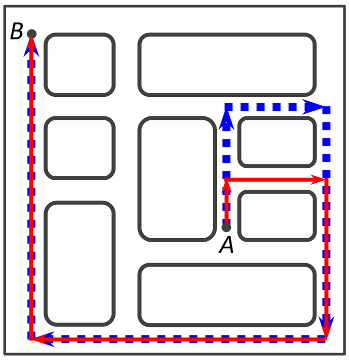
1. Man addiert – wie durch die Pfeile vorgegeben – jeweils die beiden darüber stehenden Zahlen und trägt deren Summe in das jeweils unterhalb liegende Kästchen ein. Als Endresultat ergibt sich 6; also ist Antwort E richtig.

2. Dieser Würfel besteht aus drei Ebenen mit jeweils 9 kleinen Würfeln. In der ersten (untersten) Ebene sind alle Würfel vorhanden. In der Ebene darüber fehlen jedoch 2 Würfel. In der obersten Ebene fehlen 5 Würfel. Also fehlen insgesamt 7 Würfel; somit ist Antwort C richtig.
In der Abbildung siehst du, dass der aus sieben Würfeln bestehende „Restkörper" das in der Aufgabe gegebene „Würfelgebilde" zu einem großen Würfel ergänzt.



3. Die Strecke zwischen Maria und Bianca ist in 8 gleich große Teile (= Achtel) geteilt. Da ein solches Stück (wie aus der Skizze erkennbar) 100 m lang ist, muss Maria 8 · 100 = 800 Meter gehen, um zu Bianca zu kommen; daher ist Antwort C richtig.

4. Nachdem Nick nur nach rechts abbiegen kann und seine Fahrtrichtung durch den Pfeil in Richtung „Norden" vorgegeben ist, muss er sich – bildlich gesprochen – einmal um seine eigene Achse drehen, um von A nach B zu gelangen: In Summe sind das insgesamt vier 90°-Drehungen (s. roter Streckenzug); also ist Antwort B richtig.
P.S.: Für Nicks Route gibt es übrigens noch eine weitere Möglichkeit, um ans Ziel zu gelangen: Der etwas längere Weg (blau strichliert) führt Nick am Beginn um einen ‚Häuserblock' weiter und mündet nach kurzer Zeit in die rote Route. Auch für diese Strecke bleibt jedoch die Anzahl der Abbiege-Manöver nach rechts unverändert;

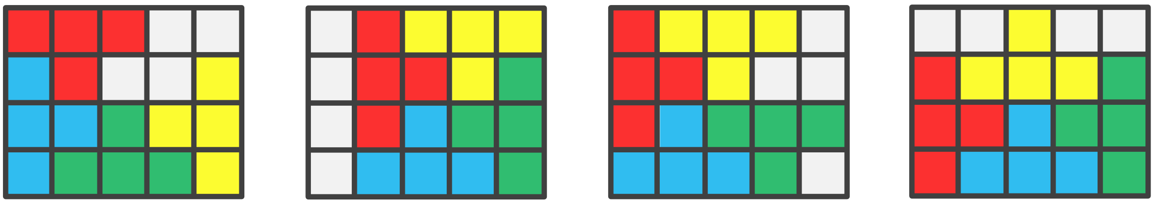


5. Anna Bob und Chris sind 31 Jahre alt. In drei Jahren sind alle drei jeweils drei Jahre älter als jetzt. In Summe sind sie also 9 Jahre älter als jetzt und daher sind sie dann zusammen 40 Jahre alt. Somit ist Antwort E richtig.

6. Durch Probieren der Möglichkeiten erkennt man rasch, dass 44 · 4 = 176 (Antwort B) die richtige Lösung ist.

7. Vorsicht: Man darf sich hier mit der Überlegung, dass 4-mal 15 (Minuten) 60, also eine volle Stunde, ergibt, nicht auf die falsche Fährte locken lassen: In Minute 60 würde Michael nämlich schon die fünfte Tablette einnehmen. Spielt man die Situation Schritt für Schritt durch, so ergibt sich folgendes Szenario:
Um 11:05 Uhr nimmt Michael die erste Tablette, um 11:20 Uhr die zweite, um 11:35 Uhr die dritte und um 11:50 Uhr bereits die vierte Tablette. – Also ist Antwort B richtig.

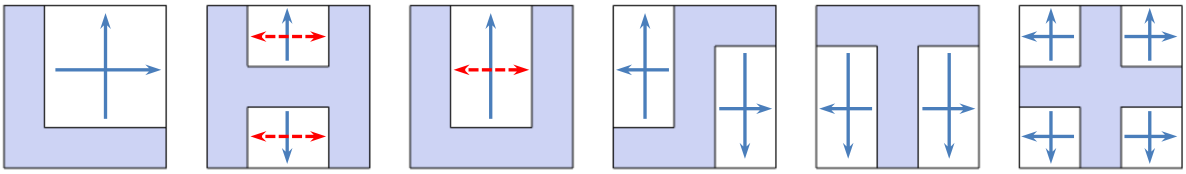
8. Anne kann maximal 4 dieser grauen Figuren ohne Überlappung auf das 5 x 4 Rechteck legen – somit ist Antwort C richtig. Einige Beispiele für Annes „Maximal-Belegungen" siehst du hier (zur besseren Verdeutlichung sind die grauen Figuren unterschiedlich eingefärbt):



- 4 Punkte Beispiele -

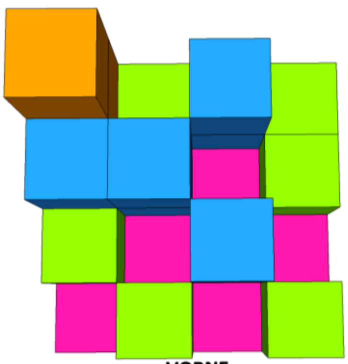
9. Zum Lösen dieser Aufgabe schreiben wir uns zunächst alle Zahlen von 21 bis 29 an und überlegen uns, welche von ihnen die Eigenschaft besitzt, dass sie durch ihre Einerziffer ohne Rest dividiert werden kann:
Die Zahl 21 ist durch 1 teilbar, die Zahl 22 durch 2, die Zahl 24 durch 4 und die Zahl 25 durch 5. Da es also 4 Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt, ist Antwort C richtig.

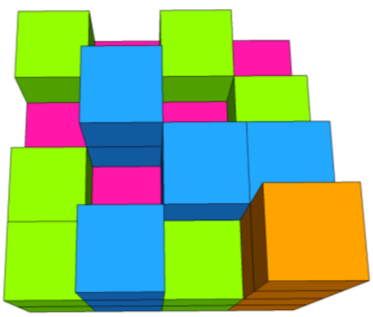
10. Die Figuren besitzen genau dann gleichen Umfang wie das Quadrat, wenn sie nur durch ‚Verschieben' von Kantenteilen entstanden sind. Dies ist bei der ersten, bei der vierten, bei der fünften und bei der sechsten Figur der Fall. – Also viermal und somit ist Antwort C richtig! Die „zulässigen" Kanten-Verschiebungen siehst du in der Abbildung unterhalb angedeutet (blaue Pfeile). Rote (strichlierte) Pfeile kennzeichnen „überschüssige" Kanten in Figuren, deren Umfang größer ist als der des quadratischen Blattes selbst:

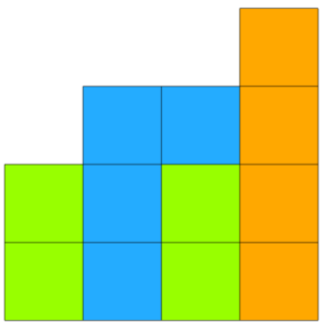


11. Patricia fährt um 13:30 Uhr ab und kommt um 15:30 Uhr an, das heißt, sie ist 2 Stunden, also 120 Minuten unterwegs. Ein Drittel der Fahrtstrecke entsprechen daher 40 Minuten. Wenn sie auf die Uhr schaut ist es zu diesem Zeitpunkt 14:10 Uhr – der Minutenzeiger schaut auf der Uhr zur Ziffer 2. – Antwort D stimmt.

12. Johann schaut von hinten auf die Türme. Er sieht jeweils die höchste Anzahl an Türmen pro Reihe. Daher sieht er auf der linken Seite 2 Türme, in der Mitte jeweils 3 Türme und auf der rechten Seite 4 Türme – VORSICHT, er schaut ja von hinten drauf. Antwort C ist richtig.

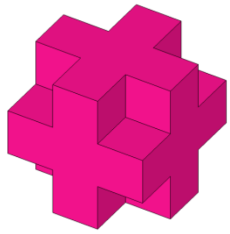

VORNE


HINTEN


Ansicht von HINTEN

13. Von den 36 Stimmen entfielen 12 auf den Gewinner und 4 auf den letzten. Die verbleibenden 20 Stimmen verteilen sich also auf die restlichen drei Schüler, von denen jeder unterschiedlich viele Stimmen erhielt. Dadurch, dass diese drei aber die Wahl weder gewonnen, noch verloren haben, wissen wir natürlich, dass sie weniger als 12, jedoch mehr als 4 Stimmen für sich ‚einheimsen' konnten. Mögliche Ausgänge sind also (in geordneter Reihenfolge) entweder <u>9</u> – 6 – 5 oder <u>8</u> – 7 – 5 Stimmen. Jener Schüler, der Zweiter wurde, konnte also 8 oder 9 Stimmen auf sich vereinen. Folglich ist Antwort B richtig.
P.S.: Die Verteilung 10 – 6 – 4, die in Summe ja auch 20 ergäbe, ist nicht zulässig, weil dann sowohl der Viert- als auch der Fünft- und somit Letztplatzierte jeweils gleich viele Stimmen – nämlich 4 – erhalten hätten.

14. Ein Würfel besteht aus 6 Flächen. Schneidet man in einer Ecke einen kleinen Würfel heraus, entstehen 3 neue Flächen! Schneidet man in jeder der 8 Würfel-Ecken diesen kleinen Würfel aus, so ergeben sich insgesamt also 24 neue Flächen (s. Abbildung). Mit den 6 Seitenflächen des Ausgangswürfels sind es dann 30 Flächen und somit ist Antwort D richtig!

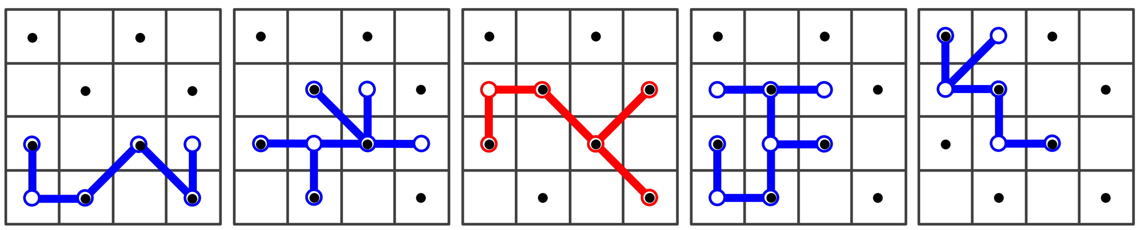


15. Um einen Überblick zu erhalten, wie viele Subtraktionen zweier zweistelliger Zahlen es mit Ergebnis 50 gibt, starten wir mit dem kleinstmöglichen Subtrahenden 10 und erhöhen dann diesen Schritt für Schritt immer um 1. – Damit das Ergebnis der Subtraktion konstant 50 bleibt, muss natürlich auch der Minuend gleichzeitig um 1 vergrößert werden: 60 – 10 = $\boxed{50}$, 61 – 11 = $\boxed{50}$, 62 – 12 = $\boxed{50}$, …, 97 – 47 = $\boxed{50}$, 98 – 48 = $\boxed{50}$, 99 – 49 = $\boxed{50}$. Dies sind 99 – 60 + 1 = 40 verschiedene Subtraktionen. – Antwort A ist richtig.

16. In der ersten Hälfte sind 6 Tore gefallen, aber das Auswärtsteam führte. Daher ist es möglich, dass das Heimteam bis zur Pause entweder kein Tor (Spielstand ⇨ 0 : 6), 1 Tor (Spielstand ⇨ 1 : 5) oder 2 Tore (Spielstand ⇨ 2 : 4) geschossen hatte. Da das Heimteam mit drei erzielten Toren in Hälfte 2 die Partie noch „drehen" und somit für sich entscheiden konnte, darf es zur Halbzeit mit maximal zwei Toren in Rückstand gelegen haben. Dies ist aber nur bei dem Halbzeitstand von 2 : 4 der Fall. Die Heimmannschaft konnte schließlich einen 5 : 4-Sieg „einfahren", während dem Auswärtsteam im zweiten Spielabschnitt kein einziges Tor mehr gelang. Somit ist Antwort C richtig.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Legt man Figur C richtig in das Quadrat, sind 5 Punkte in der Figur enthalten (rot). Mit den restlichen Figuren kann man maximal 4 (Figuren A, B & D) bzw. 3 Punkte (Figur E) einschließen:



max. 4 Punkte | max. 4 Punkte | <u>max. 5 Punkte</u> | max. 4 Punkte | max. 3 Punkte

18. Falls Matthias 6 Fische gefangen hat, geht die Rechnung auf; denn $3 \cdot 6 = 18$ und 18 ist um 12 mehr als 6. Folglich ist Antwort B richtig.
Wer sich nicht auf's Probieren verlassen will, kann die Situation mit Hilfe einer Gleichung darstellen – die unbekannte Anzahl der von Matthias gefangenen Fische bezeichnen wir dabei mit f:
$3 \cdot f = f + 12$ (auf beiden Seiten f subtrahiert, liefert) ⇔ $2 \cdot f = 12$ (teilt man nun die linke und rechte Seite der Gleichung durch 2, erhalten wir die Lösung) ⇔ $f = 6$.

19. Spätestens nach ein, zwei Versuchen kommt man drauf, dass es nicht ausreicht, nur auf die Bedingung „Zwei Zahlen in Feldern mit gemeinsamer Seite sollen sich um 1 unterscheiden." zu achten (vgl. linke & mittlere Tabelle). Um auch die geforderte 9 in der Tabelle zu erhalten, muss man die Zelleinträge von links nach rechts und von oben nach unten immer um 1 steigern: Die so entstandene Tabelle (ganz rechts) erfüllt alle Bedingungen und enthält die Zahlen von 3 bis 9, also 7 verschiedene Zahlen. Richtig ist folglich Antwort D.

3	4	5	4
2	3	4	3
3	4	3	4
2	3	4	5

4 verschiedene Zahlen

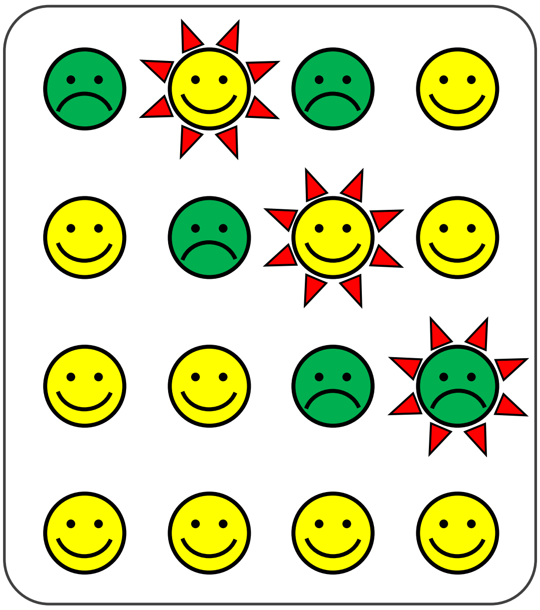
3	4	5	6
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

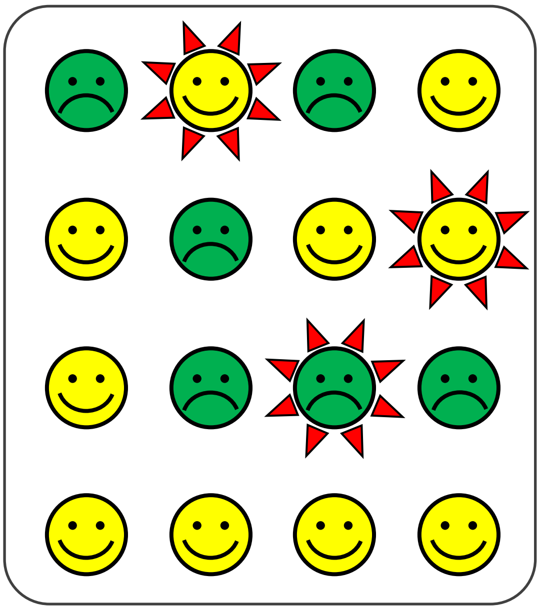
6 verschiedene Zahlen

3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	**9**

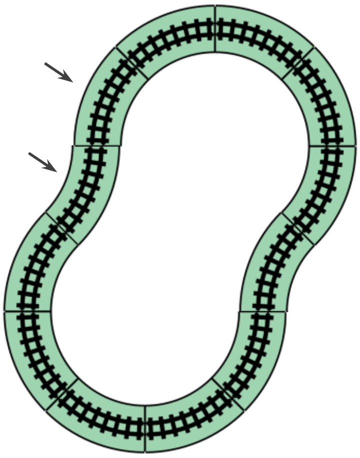
7 verschiedene Zahlen

20. Drückt man den zweiten Knopf, wird der erste Knopf lachend, der zweite weinend und der dritte lachend (vgl. Abbildung links). Drückt man nun den dritten Knopf, wird der zweite wieder lachend, der dritte wieder weinend und auch der vierte Knopf wird weinend. Drückt man nun diesen letzten Knopf, wird der dritte Knopf wieder lachend und so auch der vierte. Also schafft man es mit 3-mal drücken (Knopf 2 ⇨ Knopf 3 ⇨ Knopf 4). Folglich ist Antwort B richtig. – Eine weitere Lösung mit der minimalen Anzahl von drei Knopfdrücken siehst du rechts abgebildet (Knopf 2 ⇨ Knopf 4 ⇨ Knopf 3).
P.S.: Jede (beliebige) weitere Kombination der drei ‚aktivierten' Knöpfe 2, 3 & 4 (z. B.: 3 ⇨ 2 ⇨ 4 oder etwa auch 4 ⇨ 3 ⇨ 2, usw.) führt ebenfalls schon nach drei Schritten zum gewünschten Endresultat von vier Smileys. Du kannst es ja selbst einmal ausprobieren!





21. Nehmen wir die „Additionsmaschine“ anhand des vorgegebenen Beispiels einmal genau unter die Lupe: Addiert man vom „Ausgangstripel“ {3, 4, 6} jene zwei Zahlen, die an Position 1 und 2 stehen, nämlich 3 und 4, so ergibt sich 7; dieser Wert taucht im zweiten „Tripel“ an der 3. Stelle auf: {_ , _ , 7}. Bildet man nun die Summe aus 3 und 6 (1. & 3. Position), so kommt dieser Wert (3 + 6 = 9) an die 2. Stelle: {_ , 9, 7}. Die verbleibende Kombination der zwei Zahlen an der 2. & 3. Stelle (4 + 6 = 10) komplettiert das zweite „Zahlentripel“: {10, 9, 7}. In gleicher Weise entsteht offensichtlich auch das dritte „Zahlentripel“ {9 + 7 = 16, 10 + 7 = 17, 10 + 9 = 19}, das vierte {36, 35, 33}, usw.
Schauen wir uns nun den größten Unterschied zwischen zwei der Zahlen eines „Zahlentripels“ an: Man begreift schnell, dass die Differenz zwischen minimalem (orange & fett) und maximalem (blau & kursiv) Wert eines „3er-Blocks“ immer konstant 3 bleibt (dies ist übrigens eine Additionsregel):
{**3**, 4, *6*} ⇨ *6* – **3** = $\boxed{3}$; {*10*, 9, **7**} ⇨ *10* – **7** = $\boxed{3}$; {**16**, 17, *19*} ⇨ *19* – **16** = $\boxed{3}$; {*36*, 35, **33**} ⇨ *36* – **33** = $\boxed{3}$
Jetzt können wir schlussfolgern, dass die größte Differenz eines „Zahlentripels“, das aus den drei Zahlen {20, 1, 3} in der „Additionsmaschine“ jemals entstehen kann – egal, ob diese 1-mal, 2-mal, 3-mal oder eben auch 2013-mal rechnet –, konstant 19 (= *20* – **1**) sein muss. Somit ist Antwort D richtig.
Wer das nicht glauben will, wirft einfach die „Additionsmaschine“ an und lässt sich die ersten Zahlentripel produzieren!



22. Ohne eine (saubere) Skizze – die einzelnen Gleisteile sind jeweils Achtelkreisbögen – wird es hier schwierig. Befolgt man diese Vorgangsweise, so sieht man, dass es 12 Stücke sein müssen (siehe Abbildung – die zwei vorgegebenen Bögen sind mit einem Pfeil gekennzeichnet). Richtig ist daher Antwort B.

23. Man sollte hier die ganze Situation ‚von hinten‘ aufrollen. Der Letzte, der die Insel verlassen hat, muss ein Ritter gewesen sein, denn dieser muss die Wahrheit gesagt haben (nach ihm sind ja gleich viele Ritter wie Lügner auf der Insel, nämlich jeweils null…). Aber der Vorletzte muss ein Lügner gewesen sein, da nach ihm nur noch 1 Ritter auf der Insel war. Der Drittletzte wiederum muss die Wahrheit gesagt haben, denn als er die Insel verließ, waren ja gleich viele Ritter wie Lügner auf der Insel (jeweils einer). Dies muss sich immer abwechseln. Daher waren 1007 Ritter (der erste, der die Insel verlassen hatte und der letzte, der die Insel verlassen hatte war ein Ritter) und 1006 Lügner auf der Insel; demnach ist Antwort B richtig.

24. Wenn genau 18 Burschen ihre rechte Hand einem Mädchen geben und wir nehmen – der Einfachheit halber – an, dass diese ‚Paare‘ nebeneinanderstehen, dann geben auch 17 dieser Burschen die linke Hand einem Mädchen. Wenn sich nun die restlichen Mädchen und Burschen hinstellen, muss irgendwo nochmal ein Wechsel zwischen Mädchen und Burschen kommen und zwar so, dass der Bursch die linke Hand dem Mädchen gibt, also sind es in diesem Fall auch 18 Burschen, die ihre linke Hand einem Mädchen geben. Diese Anzahl ist unabhängig von der Reihenfolge, wie die Kinder reihum in einem Kreis stehen, solange nur die Anfangsbedingung „Genau 18 Burschen geben ihre rechte Hand einem Mädchen.“ erfüllt ist. Folglich ist Antwort A richtig.
Wer sich beim Nachvollziehen des aufgezeigten Lösungsweges schwer tut, kann es auf diese Weise versuchen: Wie so oft in solchen Situationen, hilft manchmal das Reduzieren der Problemstellung auf einen einfacheren Fall. – Nehmen wir z. B. 11 Burschen (hellblau) und 7 Mädchen (rosa) und „positionieren“ wir sie in beliebiger Position reihum in einem Kreis: Zählt man nun die Burschen, die einem Mädchen die rechte Hand reichen („rechts“), so erhalten wir in unserer Konstellation die Zahl 4. Betrachtet man in der Folge jene Jungs, die einem Mädchen ihre linke Hand hinstrecken („links“), so ergibt sich ebenfalls die Anzahl 4 (Abbildung links).
Selbst wenn wir die Anordnung nun so abändern, dass zwar nach wie vor vier Burschen die rechte Hand einem Mädchen reichen, sich aber die (geschlossenen) Gruppengrößen der Mädchen (und damit auch der Burschen)

ändern, gibt es nach wie vor auch vier Burschen, die einem Mädchen ihre linke Hand reichen (Abbildung rechts). Du hast sicher schon erkannt, dass es also gleich viele Burschen geben muss, die einem Mädchen die rechte Hand reichen, wie Burschen, die mit ihrer Linken mit einer Nachbarin „Händchen halten".
Umgemünzt auf unser Ausgangsproblem, wissen wir nun aber, dass es bei 18 Burschen, die einem Mädchen die rechte Hand reichen, ebenso viele Burschen geben muss, die mit ihrer linken Hand die Hand eines Mädchens halten. Richtig kann also nur Antwort A sein.
P.S.: Wenn man die ganze Situation vereinfacht und sich die abwechselnden Burschen- & Mädchengruppen (eine solche kann auch nur aus einer einzigen Person bestehen) anschaut, so ist aber auch klar, dass es – in einer Kreisanordnung – immer gleich viele männliche (hellblau) wie weibliche (rosa) „Blöcke" gibt. – In den beiden Grafiken ist dies durch das Einfärben des jeweils entsprechenden Kreissektors in Hellblau bzw. Rosa verdeutlicht. Das „Händereichen von Burschen" entspricht nun der „Berührung" eines blauen Kreissektors mit einem rosafarbenen. – Und da freilich jeder „Burschensektor" immer rechts und links an einen „Mädchensektor" angrenzt, geben also immer gleich viele Jungs einem Mädchen die rechte Hand wie Jungs einem Mädchen die linke Hand reichen.