KÄNGURU DER MATHEMATIK 2012
15.3.2012

Kategorie: Student, Schulstufe: 11 - 13

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

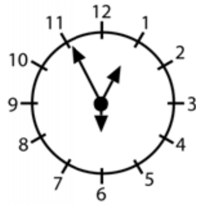
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

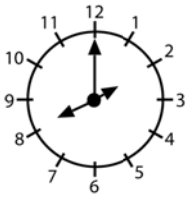
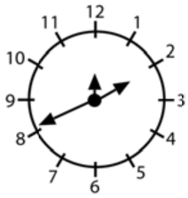
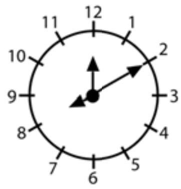
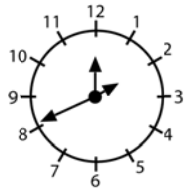
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2012
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 15.3.2012

- 3 Punkte Beispiele -

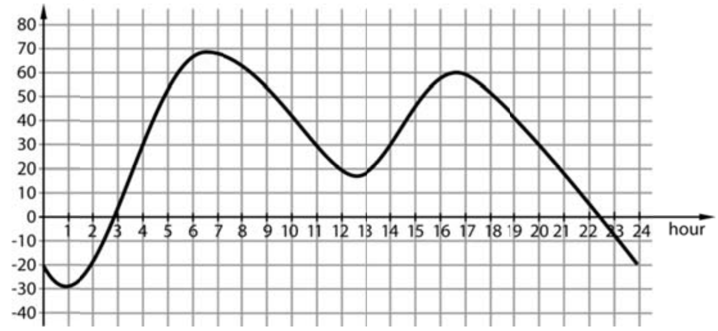


1) Eine Uhr hat drei Zeiger verschiedener Länge (für Sekunden, Minuten und Stunden). Wir wissen nicht, welcher Zeiger welche Länge hat, aber wir wissen, dass die Uhr die Zeit richtig anzeigt. Um 12:55:30 befinden sich die Zeiger in der rechts abgebildeten Stellung. Wie sieht die Uhr um 8:10:00 aus?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

2) Die Wasserhöhe in einem Hafen steigt und fällt an einem bestimmten Tag wie in der Abbildung ersichtlich. Wie viele Stunden war die Wasserhöhe an diesem Tag über 30 cm?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 13



3) Wie viele verschiedene Rechtecke mit der Fläche 60 und lauter ganzzahligen Seitenlängen gibt es?

A) 8 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

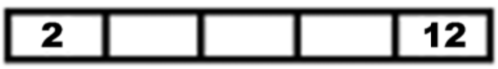
4) Die positiven ganzen Zahlen werden der Reihe nach rot, blau und grün gefärbt, und zwar 1 rot, 2 blau, 3 grün, 4 rot, 5 blau, 6 grün, usw. Welche Farbe kann die Summe einer roten Zahl und einer blauen Zahl haben?

A) jede Farbe **B)** rot oder blau **C)** nur grün **D)** nur rot **E)** nur blau

5) Die Zahl $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ist gleich

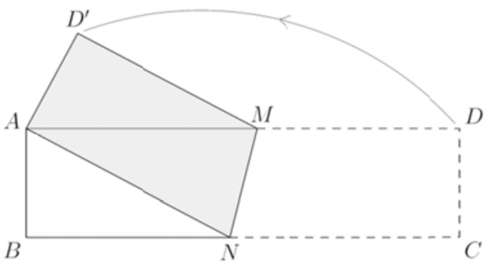
A) 1 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt[6]{4}$ **D)** $\sqrt[3]{4}$ **E)** 2

6) In einer Liste von fünf Zahlen ist die erste Zahl 2 und die letzte 12. Das Produkt der ersten drei Zahlen ist 30, das der mittleren drei 90 und das der letzten drei 360. Wie lautet die mittlere Zahl der Liste?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 10

7) Ein rechteckiges Stück Papier ABCD mit den Maßen 4 cm x 16 cm wird längs der Strecke MN so gefaltet, dass der Punkt C mit dem Punkt A wie abgebildet zusammenfällt. Wie groß ist die Fläche des Vierecks ANMD‘?



A) 28 cm^2 **B)** 30 cm^2 **C)** 32 cm^2 **D)** 48 cm^2 **E)** 56 cm^2

8) Die Ziffernsumme einer neunziffrigen Zahl ist 8. Wie groß ist das Produkt der Ziffern dieser Zahl?

A) 0 **B)** 1 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 9!

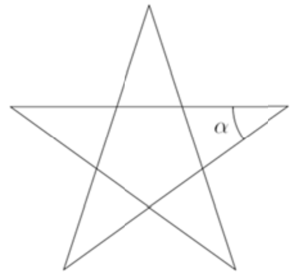
9) Die größtmögliche natürliche Zahl n, für die $n^{200} < 5^{300}$ gilt, ist

A) 5 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 11 **E)** 12

10) Das Alter von Quintus ist eine zweistellige Fünferpotenz und das Alter von Sekundus ist eine zweistellige Zweierpotenz. Addiert man alle Ziffern ihrer beiden Alterszahlen, so erhält man eine ungerade Zahl. Wie groß ist das Produkt der Ziffern ihrer Alterszahlen?

A) 240 **B)** 2012 **C)** 60 **D)** 50 **E)** 300

- 4 Punkte Beispiele -



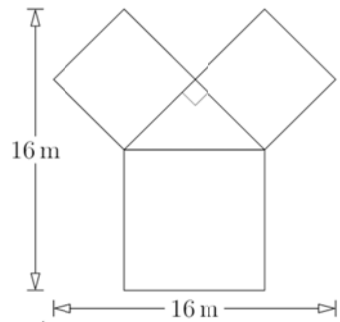
11) Wie groß ist der Winkel α im abgebildeten regelmäßigen fünfseitigen Stern?
A) 24° **B)** 30° **C)** 36° **D)** 45° **E)** 72°

12) Eine reelle Zahl x erfüllt die Bedingung $x^3 < 64 < x^2$. Welche der folgenden Aussagen ist sicher wahr?
A) $0 < x < 64$ **B)** $-8 < x < 4$ **C)** $x > 8$ **D)** $-4 < x < 8$ **E)** $x < -8$

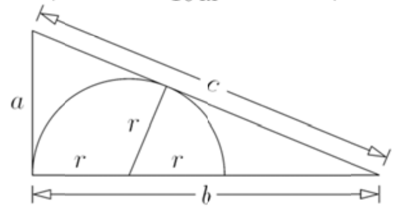
13) Ein Reisebüro organisiert für eine bestimmte Reisegruppe vier verschiedene Rundfahrten. Jede Rundfahrt hat eine Teilnahmerate von 80%. Wie groß ist der Anteil derer in der Reisegruppe mindestens, die an allen vier Rundfahrten teilgenommen haben?
A) 80% **B)** 60% **C)** 40% **D)** 20% **E)** 16%

14) Für ein Schirennen werden fortlaufende Startnummern vergeben. Eine Startnummer wurde versehentlich doppelt vergeben. Die Summe aller ausgegebenen Startnummern beträgt 857. Welche Nummer wurde doppelt vergeben?
A) 4 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 37 **E)** 42

15) In einer Klasse ist die Schularbeit nicht sehr gut ausgefallen, denn es gab einen Notenschnitt von genau 4. Die Burschen haben mit einer Durchschnittsnote von 3,6 etwas besser abgeschnitten, während die Mädchen eine Durchschnittsnote von 4,2 erreichten. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
A) Es gibt doppelt so viele Burschen wie Mädchen.
B) Es gibt 4 Mal so viele Burschen wie Mädchen.
C) Es gibt doppelt so viele Mädchen wie Burschen.
D) Es gibt 4 Mal so viele Mädchen wie Burschen.
E) Es gibt gleich viele Burschen wie Mädchen.

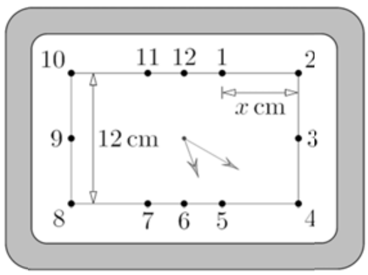


16) In der Abbildung sehen wir ein Rosenbeet. In den gleich großen Quadraten wachsen weiße Rosen, im großen Quadrat rote und im rechtwinkeligen Dreieck gelbe. Die Form des Beetes hat sowohl die Breite als auch die Höhe 16 m. Wie groß ist die Fläche des Beetes?
A) 114 m^2 **B)** 130 m^2 **C)** 144 m^2 **D)** 160 m^2 **E)** 186 m^2



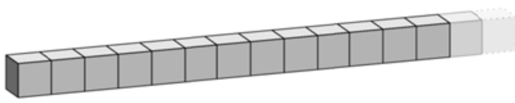
17) Ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Seitenlängen a = 8, b = 15 und c = 17 ist gegeben. Wie groß ist der Radius r des abgebildeten eingeschriebenen Halbkreises?
A) 2,4 **B)** 3 **C)** 3,75 **D)** 4,8 **E)** 6

18) Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 2. E ist der Mittelpunkt von AB und F der von AD. G ist ein Punkt auf der Strecke CF mit 3CG = 2GF. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks BEG?
A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{6}{5}$



19) Die abgebildete Uhr hat ein rechteckiges Ziffernblatt, die Zeiger bewegen sich wie üblich gleichmäßig im Kreis. Wie groß ist der Abstand x der Ziffern 1 und 2 (in cm), wenn der Abstand zwischen den Ziffern 8 und 10 mit 12 cm gegeben ist?
A) $3\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $4\sqrt{3}$ **D)** $2+\sqrt{3}$ **E)** $12-3\sqrt{3}$

20) Renate möchte eine Reihe von gewöhnlichen Spielwürfeln (bei denen die Anzahl der Punkte auf gegenüberliegenden Flächen immer zusammen 7 ergibt) wie abgebildet zu einer „Würfelstange“ zusammenkleben. Dabei will sie nur Flächen mit gleicher Punktezahl zusammenkleben.
Sie möchte erreichen, dass die Anzahl der Punkte an den nicht verklebten Flächen zusammen 2012 ergibt. Wie viele Würfel muss sie zusammenkleben?



A) 70 **B)** 71 **C)** 142 **D)** 143
E) Es ist unmöglich, genau 2012 Punkte an den nicht verklebten Flächen zu erhalten.

- 5 Punkte Beispiele -

21) Welche der folgenden Funktionen erfüllt für alle x ≠ 0 die Bedingung $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$?

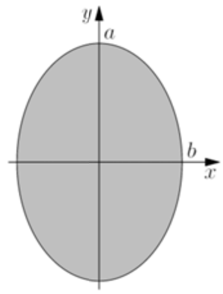
A) $f(x) = \frac{2}{x}$ **B)** $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **C)** $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ **D)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **E)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$

22) Die Lösungsmenge der Ungleichung $|x| + |x-3| > 3$ ist

A) $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ **B)** $]-3, 3[$ **C)** $]-\infty, -3[$

D) $]-3, +\infty[$ **E)** **R**

23) Es sei a > b. Rotiert die abgebildete Ellipse um die x-Achse, erhält man ein Ellipsoid E_x mit dem Volumen $Vol(E_x)$. Rotiert sie um die y-Achse, erhält man ein Ellipsoid E_y mit dem Volumen $Vol(E_y)$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

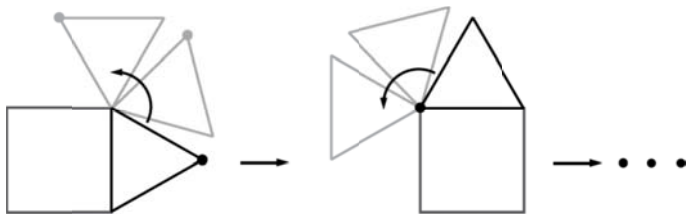


A) $E_x = E_y$ und $Vol(E_x) = Vol(E_y)$ **B)** $E_x = E_y$ aber $Vol(E_x) \neq Vol(E_y)$
C) $E_x \neq E_y$ und $Vol(E_x) > Vol(E_y)$ **D)** $E_x \neq E_y$ und $Vol(E_x) < Vol(E_y)$
E) $E_x \neq E_y$ aber $Vol(E_x) = Vol(E_y)$

24) Ich darf bei einem Spiel mit Brüchen zwei Operationen ausführen, nämlich entweder den Zähler um 8 vergrößern oder den Nenner um 7 vergrößern, ohne während des Spiels zu kürzen. Nach n derartigen Operationen erhalte ich ausgehend vom Bruch $\frac{7}{8}$ wieder einen Bruch mit dem gleichen Wert. Was ist der kleinstmögliche Wert von n?

A) 56 **B)** 81 **C)** 109 **D)** 113 **E)** Dieser Wert kann nicht wieder erreicht werden.

25) Ein gleichseitiges Dreieck rollt wie abgebildet an einem Einheitsquadrat ab. Wie lang ist der Weg, den der abgebildete Punkt zurückgelegt hat, wenn der Punkt und das Dreieck sich zum ersten Mal wieder beide an der Ausgangsstelle befinden?



A) 4π **B)** $\frac{28}{3}\pi$ **C)** 8 π **D)** $\frac{14}{3}\pi$ **E)** $\frac{21}{2}\pi$

26) Wie viele Permutationen (x_1, x_2, x_3, x_4) der Menge {1, 2, 3, 4} haben die Eigenschaft, dass die Zahl $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1$ durch 3 teilbar ist?

A) 8 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 24

27) Nach einer besonders heftigen Unterrichtsstunde waren an der Tafel noch der Graph der Funktion $y = x^2$ zu sehen, sowie 2012 Geraden parallel zur Geraden mit der Gleichung y = x, die jeweils die Parabel in zwei Punkten schneiden. Wie groß ist die Summe aller x-Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel?

A) 0 **B)** 1 **C)** 1006 **D)** 2012 **E)** Die Zahl ist von der Wahl der Geraden abhängig.

28) Drei Eckpunkte eines Würfels (nicht alle auf einer gemeinsamen Seitenfläche) haben die Koordinaten P(3/4/1), Q(5/2/9) und R(1/6/5). Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt des Würfels?

A) A(4/3/5) **B)** B(2/5/3) **C)** C(3/4/7) **D)** D(3/4/5) **E)** E(2/3/5)

29) In der Folge 1, 1, 0, 1, -1, … sind die ersten beiden Glieder a_1 und a_2 jeweils gleich 1. Das dritte Glied ist die Differenz der beiden zuvor, und es gilt $a_3 = a_1 - a_2$. Das Vierte ist die Summe der beiden zuvor mit $a_4 = a_2 + a_3$. Dann gilt $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, und so weiter abwechselnd Differenz bzw. Summe. Wie groß ist die Summe der ersten 100 Glieder dieser Folge?

A) 0 **B)** 3 **C)** -21 **D)** 100 **E)** -1

30) Gerhard wählt zwei Zahlen a und b aus der Menge {1, 2, 3, …, 26}. Das Produkt a·b dieser beiden Zahlen ist gleich der Summe der verbleibenden 24 Zahlen aus der Menge. Wie groß ist |a-b|?

A) 10 **B)** 9 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 6