

Känguru der Mathematik 2008
Gruppe Student (11. - 13. Schulstufe)
Österreich - 31.3.2008



- 3 Punkte Beispiele -

1) Die Zahlen 3 und 4 sowie zwei weitere, unbekannte Zahlen werden in die Felder einer 2×2 Tabelle geschrieben. Es ist bekannt, dass die Summen der Zahlen in den beiden Zeilen 5 bzw. 10 sind, und dass die Summe in einer Spalte 9 beträgt. Die größere der beiden unbekannt Zahlen ist dann

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

2) Wenn $x + y = 0$ und $x \neq 0$, dann gilt $\frac{x^{2008}}{y^{2008}} =$

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{2008} E) x/y

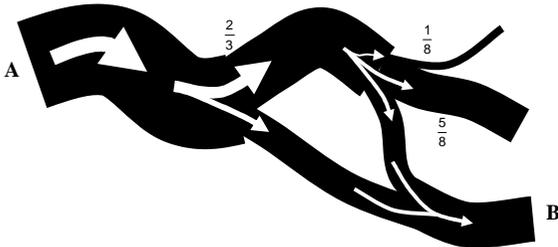
3) In einer Tabelle gibt es 21 Spalten, die mit 1, 2, ... 21 beschriftet sind, und 33 Zeilen, die mit 1, 2, ... 33 beschriftet sind. Wir löschen die Zeilen, deren Nummern nicht Vielfache von 3 sind und die Spalten mit gerader Nummer. Wie viele Felder der Tabelle bleiben nach diesem Prozess bestehen?

- A) 110 B) 121 C) 115,5 D) 119 E) 242

4) Wie viele Primzahlen p gibt es, für die $p^4 + 1$ ebenfalls prim ist?

- A) keine B) 1 C) 2 D) 3 E) unendlich viele

5) Ein Fluss teilt sich nach Punkt A in mehrere Arme. An der ersten Verzweigung fließen $\frac{2}{3}$ in den Hauptarm, der Rest in einen Nebenarm. Der Hauptarm verzweigt sich nochmals in drei Arme: Einer nimmt $\frac{1}{8}$ des Wassers aus Hauptarm auf, ein anderer $\frac{5}{8}$; der dritte Arm mündet weiter flussabwärts wieder in den Nebenarm. Welcher Bruchteil des Wassers fließt durch B?



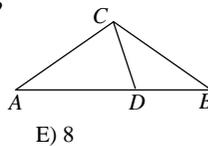
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$
 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

6) Gegeben sei ein gleichschenkeliges Dreieck ABC (mit $CA = CB$). Der Punkt D liegt so auf AB, dass $AD = AC$ und $DB = DC$. Welchen Winkel schließen CA und CB ein?

- A) 98° B) 100° C) 104° D) 108° E) 110°

7) Der maximale Wert von $f(x) = |5 \sin x - 3|$ für $x \in \mathbb{R}$ ist

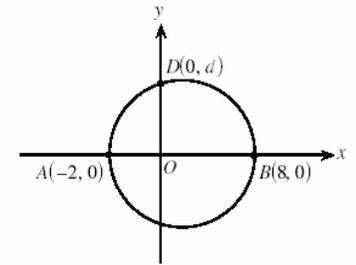
- A) 2 B) 3 C) π D) 5π



- E) 8

8) In der Abbildung sehen wir einen Kreis mit Durchmesser AB und den darauf liegenden Punkt D. Die Koordinaten der Punkte sind $A(-2|0)$, $B(8|0)$ und $D(0|d)$. Bestimme den Wert von d .

- A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) 5 E) 6



9) Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 werden in dieser Reihenfolge auf einer Geraden gezeichnet (mit Abständen zwischen den Punkten, die auch verschieden sein können). Ein weiterer Punkt P wird auf der Geraden so platziert, dass die Summe $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 + PA_5$ der Abstände minimal ist. Dann liegt P

- A) auf A_1 B) auf A_2 C) auf A_3
 D) zwischen A_2 und A_3 E) zwischen A_3 und A_5

10) Nora möchte die Leerstellen der Zahl $2 _ _ 8$ so auffüllen, dass sich eine durch 3 teilbare Zahl ergibt. Wie viele Möglichkeiten dafür gibt es?

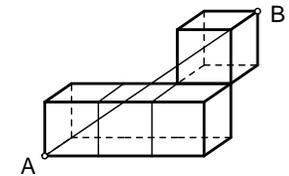
- A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 E) 33

- 4 Punkte Beispiele -

11) Gegeben sind sieben Zahlen: $-9; 0; -5; 5; -4; -1; -3$. Sechs davon werden in drei Zweiergruppen so zusammengefasst, dass die Summe der Zahlen in allen Gruppen gleich ist. Welche Zahl bleibt übrig?

- A) 5 B) 0 C) -3 D) -4 E) -5

12) Jeder Würfel in der Abbildung hat die Kantenlänge 1. Wie lang ist die Strecke AB?



- A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$

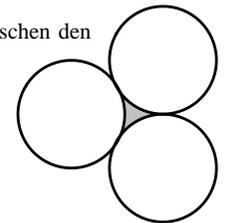
13) Von 5 verschiedenen natürlichen Zahlen ist bekannt, dass die Summe der beiden kleinsten Zahlen 10 und die Summe der beiden größten Zahlen 18 ist. Was ist die Summe der fünf Zahlen?

- A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

14) Mathilde hat 36 Kängurus gezeichnet, wobei sie drei verschiedene Farben verwendet hat. 25 Kängurus sind zumindest teilweise gelb, 28 sind zumindest teilweise braun und 20 sind zumindest teilweise schwarz. Nur fünf sind dreifärbig. Wie viele einfarbige Kängurus hat sie gezeichnet?

- A) keine B) 4 C) 12 D) 31 E) Es ist zu wenig Information gegeben.

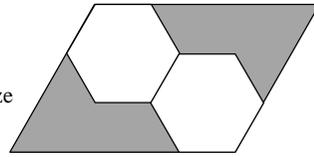
15) Jeder von drei Kreisen mit Radius r berührt die beiden anderen Kreise (siehe Abbildung). Welchen Flächeninhalt hat das graue Flächenstück zwischen den Kreisen?



- A) $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)r^2$ B) $\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$ C) $\frac{1}{8}\pi r^2$
 D) $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\pi r^2$ E) $\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$

16) In der Abbildung sind die beiden regelmäßigen Sechsecke kongruent. Welcher Bruchteil der Parallelogrammsfläche ist grau?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{12}$



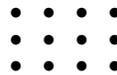
17) Zähler und Nenner eines Bruchs sind jeweils negative ganze Zahlen. Der Zähler ist um 1 größer als der Nenner. Welche der folgenden Aussagen über den Bruch ist richtig?

- A) Der Bruch hat einen Wert kleiner als -1 . B) Der Bruch hat einen Wert zwischen -1 und 0 .
 C) Der Bruch hat einen positiven Wert kleiner als 1 . D) Der Bruch hat einen Wert größer als 1 .
 E) Es kann nicht eindeutig abgeleitet werden, ob der Wert des Bruchs positiv oder negativ ist.

18) Es gilt $x^2 y z^3 = 7^3$ und $xy^2 = 7^9$. Dann ist $xyz =$

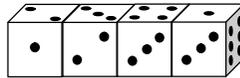
- A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

19) Drei Punkte werden zufällig aus dem gegebenen Raster ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen?



- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

20) Vier identische Würfel werden in einer Reihe aneinandergelegt (siehe Zeichnung). Jeder Würfel hat Flächen mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten, aber die Summe der Punkte gegenüberliegender Flächen ist nicht unbedingt (wie gewöhnlich) 7. Wie groß ist die Augensumme von den 6 Flächen, in denen sich die Würfel berühren?



- A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

- 5 Punkte Beispiele -

21) Die Kantenlängen eines Quaders bilden in cm gemessen eine geometrische Folge ganzer Zahlen mit Quotient $q=2$. Welche der folgenden Maßzahlen kann das Volumen des Quaders angeben?

- A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 C) 216 cm^3 D) 350 cm^3 E) 500 cm^3

22) In der Abbildung steht jeder Stern für eine Ziffer. Die Ziffernsumme des Produkts ist

$$\begin{array}{r} * * * \cdot 1 * * \\ * * 2 \\ \hline 9 0 * \\ 2 2 * * \\ \hline 5 6 * * * \end{array}$$

- A) 16 B) 20 C) 26 D) 30 E) eine andere Antwort

23) Berechne $x^2 + y^2 + z^2$, wenn $x + y + z = 1$ und $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ gelten.

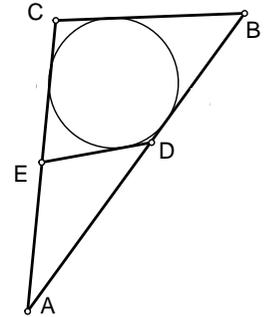
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Es kann nicht berechnet werden.

24) Das erste Glied einer Folge ist $a_1 = 0$, und für $n \geq 1$ gilt $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$. Wenn $a_k = 2008$, so ist k gleich

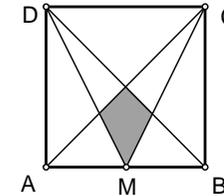
- A) 2008 B) 2009 C) 4017 D) 4018 E) eine andere Zahl

25) Die Punkte D und E liegen so auf den Seiten AB bzw. AC eines Dreiecks ABC mit Seitenlängen $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 5$, dass die Strecke DE den Inkreis von ABC berührt. Welchen Umfang hat das Dreieck ADE?

- A) 7 B) 4 C) 9 D) 6 E) 8



26) Das Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 1. M ist der Mittelpunkt von AB. Die Fläche des grauen Bereichs beträgt

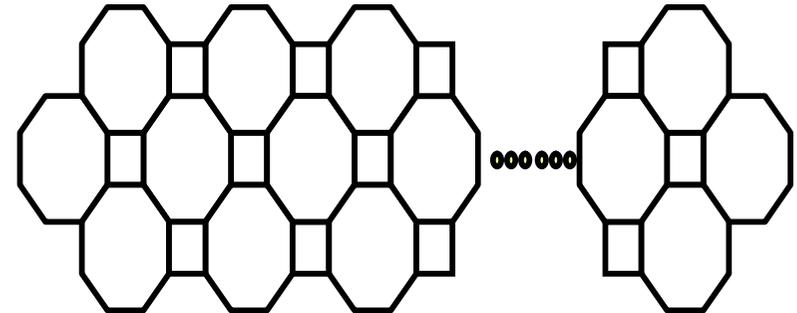


- A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{2}{13}$

27) Sieben Karten, die mit den Zahlen von 1 bis 7 beschriftet sind, liegen in einer Schachtel. Der erste Zauberer zieht drei Karten aus der Schachtel und sieht sie an. Dann zieht der zweite Zauberer zwei Karten aus der Schachtel. Zwei Karten bleiben in der Schachtel. Der erste Zauberer sagt zum zweiten: „Ich weiß, dass die Summe der Zahlen auf deinen beiden Karten eine gerade Zahl ist!“ Wie groß ist die Summe der Zahlen auf den Karten des ersten Zauberers?

- A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

28) Das abgebildete Gitter wurde aus Metallstangen zusammengesetzt. Wir wissen, dass das fertige Gestell 61 Achtecke enthält. Aus wie vielen Stangen wurde es zusammengesetzt?



- A) 488 B) 400 C) 328 D) 244 E) 446

29) Die Zahl $3^{32} - 1$ hat genau zwei Teiler, die größer als 75 und kleiner als 85 sind. Wie lautet das Produkt dieser beiden Teiler?

- A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

30) Wenn $\sin x + \cos x = m$, dann gilt $\sin^4 x + \cos^4 x =$

- A) $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$ B) $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$ C) $\frac{1 - (1-m^2)^2}{2}$ D) m^4 E) $m^4 + 1$